

## Đáp án Toán C2\_HK2\_2015 - 2016

### Câu 1 (3đ)

#### a. (2 đ)

$$f(x,y) = 8x + 10y - (x^2 + y^2) + 100$$

Điểm dừng bên trong:

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} f'_x = 8 - 2x = 0 \\ f'_y = 10 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (nhận). } f(4;5) = 141 \quad (0,5\text{đ})$$

Điểm dừng trên biên:

$$\text{Trên biên 1: } \begin{cases} y = 10 - x \\ 1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow f = f(x) = -2x^2 + 18x + 100; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 9/2 \quad (0,5\text{đ})$$

$$f(1) = 116; f(9/2) = 140,5; f(9) = 100$$

$$\text{Trên biên 2: } \begin{cases} y = 1 \\ 1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow f = f(x) = -x^2 + 8x + 109; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad (0,5\text{đ})$$

$$f(1) = 116; f(4) = 125; f(9) = 100$$

$$\text{Trên biên 3: } \begin{cases} x = 1 \\ 1 \leq y \leq 9 \end{cases} \Rightarrow f = f(y) = -y^2 + 10y + 107; f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 5 \quad (0,5\text{đ})$$

$f(1) = 116; f(5) = 132; f(9) = 116$ . So sánh các giá trị hàm số, ta thấy công ty có lợi nhuận lớn nhất là 141 tỷ đồng khi công ty sản xuất 4 ngàn sp loại I và 5 ngàn sp loại II.

b) (1đ). Ta có tốc độ thay đổi của sản lượng theo thời gian là:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{dL}{dt} \\ &= (50 \cdot K^{-3/4} L^{1/2}) \cdot (0,5) + (100 \cdot K^{1/4} L^{-1/2}) \cdot (0,8) \end{aligned} \quad (0,5\text{đ})$$

$$= (50 \cdot (16)^{-3/4} (25)^{1/2}) \cdot (0,5) + (100 \cdot (16)^{1/4} (25)^{-1/2}) \cdot (0,8)$$

$$= 47,625 \text{ (tấn/năm)} \quad (0,5\text{đ})$$

**Câu 2 (3đ):**

a) (2đ) Giải pt thuần nhất :  $p''+3p'+2p = 0$ , ta được nghiệm tổng quát

$$p_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \quad (0,5đ)$$

Nghiệm riêng pt:  $p''+3p'+2p = e^{-t}$  có dạng  $p_{r1}(t) = Ate^{-t}$ .

Ta tìm được  $p_{r1}(t) = te^{-t}$  (0,75đ)

Nghiệm riêng pt:  $p''+3p'+2p = 179$  có dạng  $p_{r2}(t) = B$ .

Ta tìm được  $p_{r2}(t) = 89,5$  (0,5đ)

Vậy ta có nghiệm tổng quát của pt ban đầu là

$$p = p_0(t) + p_{r1}(t) + p_{r2}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + te^{-t} + 89,5 \quad (0,25đ)$$

Khi thời gian t đủ lớn, giá sản phẩm sẽ xấp xỉ 89,5 (usd)

b) (1đ) Cách 1:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B-Q) \Leftrightarrow Q'(t) - kBQ = -kQ^2 \quad (\text{pt Bec - nu - li})$$

Chia hai vế cho  $Q^2$  (xét  $Q$  khác 0), đặt  $z = \frac{-1}{Q}$ , suy ra  $z' = \frac{Q'}{Q^2}$  ta được

$$z' + kBz = -k \quad (\text{pt tuyến tính}). \quad (0,5đ)$$

$$\text{Suy ra } z(t) = \frac{1}{e^{kBt}} \left( \int -ke^{kBt} dt + C \right) = \frac{1}{e^{kBt}} \left( -\frac{e^{kBt}}{B} + C \right) = \frac{-1}{B} + \frac{C}{e^{kBt}}$$

$$\text{Vậy } Q(t) = \frac{-1}{\frac{-1}{B} + \frac{C}{e^{kBt}}} = \frac{B}{1 - BCe^{-kBt}}. \quad (0,5đ)$$

Cách 2:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B-Q) \Leftrightarrow \frac{dQ}{Q(B-Q)} = kdt \quad (0,5d)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dQ}{Q(B-Q)} = \int kdt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B} \ln \left| \frac{Q}{B-Q} \right| = kt + C \Leftrightarrow Q = \frac{B}{1 + Ae^{-kbt}} \quad (0,5d)$$

**Câu 3 (2d):**

a. Số người trung bình tham gia giao thông tại con đường nói trên là:

$$\frac{1}{3} \int_0^3 \frac{0,05t+10}{t^2+4} dt \quad (0,25d)$$

$$= \frac{1}{3} \left( 0,05 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2+4) + 10 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \Big|_0^3 \quad (0,5d)$$

$$\approx 1,6478 \quad (0,25d)$$

b.  $R(t) = 200(20 + 0,1 \int_t^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx + t^2 e^{-3t}) = 200[20 + 0,1(te^{-t} + e^{-t}) + t^2 e^{-3t}] \quad (0,5d)$

Doanh thu của sản phẩm tại thời điểm 1 năm=12 tháng sau khi sản phẩm được đưa vào thị trường

$$R(12) = 200 [20 + 0,1(12e^{-12} + e^{-12}) + 12^2 e^{-36}] = 4000,0016 \text{ (100 triệu đồng)} \quad (0,5d)$$

**Câu 4 (2d):**

a) Đặt  $F = S^2 P + 0,1P^3 S - C$

Tốc độ thay đổi của giá khi chênh lệch cung - cầu thay đổi là:

$$P'(S) = -\frac{F'_S}{F'_P} \quad (0,5d)$$

$$= -\frac{2SP + 0,1P^3}{S^2 + 0,3P^2 S} \quad (0,5d)$$

b) Ta cần tìm  $(x, y)$  sao cho  $WA^2 + WB^2 + WC^2$  nhỏ nhất

$$WA^2 + WB^2 + WC^2 = (x-1)^2 + (y-5)^2 + x^2 + y^2 + (x-8)^2 + y^2 = g(x, y)$$

$$g(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 18x - 10y + 90 \quad (0,5d)$$

$$\begin{cases} g_x = 6x - 18 = 0 \\ g_y = 6y - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$A = g_{xx} = 6$$

$$B = g_{xy} = 0$$

$$C = g_{yy} = 6$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \Delta = AC - B^2 > 0 \\ A > 0 \end{cases} \forall x, y$$

Vậy vị trí xây nhà máy là  $W(3; 5/3)$ .

Khi đó tổng khoảng cách đạt giá trị nhỏ nhất là  $164/3$ . (0,5d)