

Đề thi

Câu I. (2.0 điểm) Cho ma trận $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

- (a) Tìm tất cả các ma trận N (nếu có) thỏa mãn điều kiện $MN - NM = I_2$.
(b) Tính M^n , với n là số nguyên lớn hơn 1.

Câu II. (3.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2[x]$ được xác định bởi: với mọi $u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(u) = (a - 2b + 5c) + (2a - 3b + 6c)x + (3a - 4b + 7c)x^2.$$

- (a) Xác định cấu trúc của các không gian véc tơ $\text{Ker}\varphi$ và $\text{Im}\varphi$.
(b) Hỏi $P_1[x]$ có là một không gian véc tơ con của $P_2[x]$ không? Vì sao?
(c) Chứng tỏ rằng, tập $\mathcal{M}_2 = \{v_1 = 1 + 2x, v_2 = 2 + 3x\}$ là một tập sinh của $P_1[x]$.
(d) Đặt $v_m = m + (m + 1)x$, với $1 \leq m \leq 2025$. Hỏi tập $\mathcal{M}_{2025} = \{v_1, v_2, \dots, v_{2025}\}$ có là một tập sinh của $P_1[x]$ không? Vì sao?

Câu III. (2.5 điểm) Cho dạng toàn phương $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 12x_2x_3$. Gọi A là ma trận của dạng toàn phương, ký hiệu $\text{Row}A$ là không gian sinh bởi tất cả các véc tơ hàng của ma trận A .

- (a) Tìm số chiều và một cơ sở của $\text{Row}A$.
(b) Đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2, x_3)$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hoá trực giao.
(c) Sử dụng kết quả trên, hãy đưa dạng toàn phương $h(X) = X^T A^{2025} X$, với $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hoá trực giao.

Câu IV. (2.0 điểm)

- (a) Trong vành $\mathbb{Z}_{26}$, cho ma trận $K = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$. Hãy dùng hệ mật mã Hill với khoá K để giải mã đoạn tin nhắn: “AIRBLADE”. Biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái tiếng Anh được đặt tương ứng với mỗi phần tử trong vành $\mathbb{Z}_{26}$ như trong bảng sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- (b) Cho n là số nguyên lớn hơn 1, ký hiệu $M_n(\mathbb{R})$ là tập tất cả các ma trận vuông cấp n với hệ số thực. Đặt $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \det(A^{2025}) = 1\}$. Hãy chứng tỏ rằng, phép nhân hai ma trận trên $M_n(\mathbb{R})$ là một phép toán hai ngôi trên $\mathcal{S}$ và tập $\mathcal{S}$ cùng với phép toán này tạo thành một nhóm.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm về đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CDR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, ...) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính.	Câu I, Câu III, Câu IV
[CDR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian vectơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp GramSchmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,...	Câu II, Câu III
[CDR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, vectơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương; đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.	Câu II, Câu III
[CDR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, ...	Câu IV

TP. HCM, ngày 15 tháng 10 năm 2025
Bộ môn Toán