Đáp án Toán kinh tế 1
Học kỳ 3- Năm học 2022-2023

Bài 1 (2 điểm) Một người lập kế hoạch mỗi năm gửi vào tài khoản tiết kiệm 100 triệu đồng. Thời điểm này lãi suất ngân hàng là 7,5% năm. Được 3 năm, kinh tế khủng hoảng, người này không tiếp tục gửi thêm tiền vào tài khoản tiết kiệm, nhưng vẫn không rút lãi mà để lãi nhập gốc. Cũng từ thời điểm này lãi suất tiền gửi đã tăng lên 8% năm. Hỏi sau 6 năm kể từ thời điểm người này bắt đầu gửi tiết kiệm thì tài khoản gửi tiết kiệm của người này là bao nhiêu.

Giải: Đặt $i = 0{,}075; j = 0{,}08;\ R_0 = 100$

Sau năm thứ nhất $R_1 = R_0(1+i)$

Sau năm thứ hai $R_2 = R_1(1+i) + R_0(1+i) = R_0(1+i)^2 + R_0(1+i)$

Sau năm thứ ba $R_3 = R_2(1+i) + R_0(1+i) = R_0(1+i)^3 + R_0(1+i)^2 + R_0(1+i)$

$$R_3 = R_0(1+i)\frac{(1+i)^3-1}{1+i-1} = 347{,}2931875\ (triệu\ đồng).$$

Sau năm thứ tư $R_4 = R_3(1+j)$

Sau năm thứ năm $R_5 = R_4(1+j) = R_3(1+j)^2$

Sau năm thứ sáu $R_6 = R_5(1+j) = R_3(1+j)^3 = 437.4881361\ (triệu\ đồng)$.

Bài 2 (1,5 điểm) Tổng chi phí để sản xuất q đơn vị hàng hóa của một nhà máy cho bởi

$$C(q) = 0,2q^3 - 0,5q^2 + 300q + 500\ (đô\ la).$$

Tính độ co giãn của chi phí theo sản lượng khi $q = 10$. Khi số lượng hàng hóa sản xuất q thêm 1 đơn vị ở mức $q = 10$ thì chi phí sản xuất $C(q)$ thay đổi như thế nào.

Giải:

$$C'(q) = 0,6q^2 - q + 300$$

Độ co giãn của chi phí theo sản lượng có dạng

$$\eta(q) = \frac{(0,6q^2 - q + 300)q}{0,2q^3 - 0,5q^2 + 300q + 500}$$

Độ co giãn của chi phí theo sản lượng khi $q = 10$ bằng

$$\eta(10) = \frac{(0,6.10^2 - 10 + 300)10}{0,2.10^3 - 0,5.10^2 + 300.10 + 500} = \frac{70}{163} \approx 0{,}4294478528$$

Khi số lượng hàng hóa sản xuất q thêm 1 đơn vị ở mức $q = 10$, tức là q tăng 1% thì chi phí sản xuất $C(q)$ tăng $\eta(10)\% \approx 0{,}4294478528\%$.

Bài 3 (1 điểm) Số lượng mặt hàng A, B, C bán được trong mỗi ngày trong 1 tuần xác định tại cửa hàng tiện lợi M cho bởi ma trận

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Biết giá bán của mặt hàng A, B, C lần lượt là 2; 3 và 1 (đơn vị: trăm ngàn đồng); Thiết lập ma trận doanh thu mỗi ngày trong 1 tuần, rồi tính doanh thu của cả tuần này đối với 3 loại mặt hàng A, B, C.

Giải

Ma trận giá bán các sản phẩm A, B, C có dạng

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận doanh số theo ngày có dạng

$$R = Y.X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 21 & 26 & 15 & 22 & 27 & 20 \end{pmatrix}$$

Doanh số trong 1 tuần là $16 + 21 + 26 + 15 + 22 + 27 + 20 = 147$ (trăm ngàn đồng)

Bài 4 (2 điểm) Biện luận theo tham số m xác định hạng và xét dấu ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Giải

Biến đổi tương đương hàng ta có

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m-13 \end{pmatrix}$$

Khi $m = 13$ ta có $r(B) = 2$; còn khi $m \neq 13$ ta có $r(B) = 3$.

Định thức ma trận chính cấp 1 là $M_1 = \det(1) = 1 > 0$

Định thức ma trận chính cấp 2 là $M_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0$

Định thức ma trận chính cấp 3 là $M_3 = \det(B) = m - 13$;

Khi đó nếu $m > 13$ ta có B là ma trận xác định dương; $m < 13$ thì ma trận B không xác định dấu.

Tại $m = 13$ ma trận B có dạng

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

B là ma trận đối xứng. Giải phương trình đặc trưng

$$\det(B - \lambda I) = 0 \leftrightarrow -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 35\lambda = 0$$

Suy ra ma trận B có 3 trị riêng $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 8 + \sqrt{29};\ \lambda_3 = 8 - \sqrt{29}$; do đó ta có B là ma trận nửa xác định dương.

Vậy khi $m > 13$ thì B là ma trận xác định dương; khi $m = 13$ thì B là ma trận nửa xác định dương; $m < 13$ thì ma trận B không xác định dấu.

Bài 5 (1,5 điểm) Tìm đa thức Taylor bậc 1 cho hàm $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ từ đó tính gần đúng $\sqrt{1 + 1{,}9^2 + 2{,}05^2}$.

Giải:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}};\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

Đặt $x_0 = 2; y_0 = 2 \rightarrow f(2{,}2) = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2;2) = \frac{2}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3};\ \frac{\partial f}{\partial y}(2;2) = \frac{2}{3}$$

Đa thức Taylor bậc 1 cho hàm f(x; y) tại lân cận $x_0 = 2; y_0 = 2$ có dạng;:

$$P_1(x,y) = f(2;2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2;2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2;2)(x-2) = 3 + \frac{2}{3}(x-2) + \frac{2}{3}(y-2)$$

$$\sqrt{1 + 1{,}9^2 + 2{,}05^2} = f(1{,}9;2{,}05) \approx P_1(1{,}9;2{,}05) = 3 + \frac{2}{3}(1{,}9 - 2) + \frac{2}{3}(2{,}05 - 2)$$
$$= \frac{89}{30} = 2{,}9(6)$$

Bài 6 (2 điểm) Một cửa hàng bán đồ co thú cưng có hai nhãn sữa tắm gội cho thú cưng, một nhãn hiệu nội địa với giá gốc 60 (ngàn đồng/chai) và một nhãn hiệu nhập ngoại nổi tiếng với giá gốc 70 (ngàn đồng/chai). Người bán hàng ước tính rằng nếu thương hiệu nội địa được bán với giá x (ngàn đồng/chai) thương hiệu nội địa và y (ngàn đồng/chai) nhãn hiệu nhập ngoại, thì có khoảng $90 - 5x + 3y$ chai sữa tắm gội cho thú cưng nhãn hiệu nội địa và $50 + 5x - 6y$ chai sửa tắm gội nhãn hiệu nhập ngoại sẽ được bán mỗi tháng. Chủ cửa hàng nên lựa chọn giá bán mỗi nhãn hiệu như thế nào để tối đa hóa tổng lợi nhuận hàng tháng từ việc bán sữa tắm gội cho thú cưng.

Giải

Chi phí mua hàng bán trong tháng là

$$C(x,y) = (90 - 5x + 3y)60 + (50 + 5x - 6y)70 = 8900 - 50x - 240y$$

Doanh thu bán hàng trong tháng là

$$R(x,y) = (90 - 5x + 3y)x + (50 + 5x - 6y)y$$

Lợi nhuận bán hàng trong tháng là

$$\pi(x,y) = R(x,y) - C(x,y) = -5x^2 - 6y^2 + 8xy + 140x + 330y - 8900$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial x} = -10x + 8y + 140;\ \frac{\partial^2\pi}{\partial x^2} = -10\ ;\ \frac{\partial^2\pi}{\partial x\partial y} = 8$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial y} = -12y + 8x + 330;\ \frac{\partial^2\pi}{\partial y^2} = -12$$

Giải hệ tìm điểm tới hạn

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi}{\partial x} = -10x + 8y + 140 = 0 \\ \dfrac{\partial\pi}{\partial y} = -12y + 8x + 330 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{540}{7} \approx 77{,}14285714\ (ngàn\ đồng) \\ y = \dfrac{1105}{14} \approx 78{,}92857143\ (ngàn\ đồng) \end{cases}$$

Ma trận Hesse của hàm lợi nhuận $\pi(x,y)$

$$H = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Là ma trận xác định âm với mọi vecto $(x \quad y)$ do các định thức con chính $M_1 = -10 < 0$; $M_1 = 56 > 0$, nên hàm lợi nhuận $\pi(x,y)$ đạt cực đại tại $x = \frac{540}{7}$; $y = \frac{1105}{14}$.