Đáp án Toán 3 (Mã MATH132601) , ngày thi: 26/ 7/ 2023

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (2đ)	1 (1đ)	Nguyên hàm vận tốc ta được $R(t) = (\sin t + C_1, -\cos t + C_2, \frac{4}{3}t\sqrt{t} + C_3)$ Thay $R(0) = (0,0,0)$ vào tìm được $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$. Suy ra $R(t) = (\sin t, -\cos t + 1, \frac{4}{3}t\sqrt{t})$ và $R(1) = (\sin 1, -\cos 1 + 1, \frac{4}{3})$.	0,5 0.25 0,25
	2 (1đ)	Ta có $R'(t) = (\cos t, \sin t, 2\sqrt{t})$, $R''(t) = (-\sin t, \cos t, \frac{1}{\sqrt{t}})$ Suy ra độ cong $\kappa(t) = \frac{\lVert R' \times R'' \rVert}{\lVert R' \rVert^3} = \frac{\sqrt{1/t + 4t + 1}}{\sqrt{(1+4t)^3}}$	0,5 0,5
2 (3đ)	1 (0.5đ)	$u = \sin(x - at) \Rightarrow u_{tt} = (-a)^2(-\sin(x - at)),\ u_{xx} = -\sin(x - at)$ $\Rightarrow u_{tt} = a^2 u_{xx}$	0,5
	2 (1đ)	Đặt $F(x,y,z) = x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz$. Ta có $F_x = 3x^2 - 3yz, F_y = -3y^2 - 3xz, F_z = -3z^2 - 3xy$ Suy ra $F_x(1,-1,2) = 9, F_y(1,-1,2) = -9, F_z(1,-1,2) = -9$ Phương trình tiếp diện: $9(x-1) - 9(y+1) - 9(z-2) = 0$ $\Leftrightarrow x - y - z = 0$	0,5 0.25 0,25
	3 (1.5đ)	Các đạo hàm riêng: $f_x = 3x^2 - 3y, f_y = 6y - 3x - 9$ Các điểm dừng là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 6y - 3x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 6x^2 - 3x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \text{ hoặc } x = 3/2 \end{cases}$ Vậy có 2 điểm dừng $A(-1,1)$ và $B(3/2, 9/4)$. Các đạo hàm riêng cấp 2 và biệt thức: $f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6$, $D = 36x - 9$ Tại $A(-1,1)$ thì $D = -45 < 0$. Suy ra A là điểm yên ngựa. Tại $B(3/2, 9/4)$ thì $D = 63 > 0$ và $f_{xx}(3/2, 9/4) = 9 > 0$. Suy ra B là cực tiểu địa phương.	0.5 0,25 0.25 0,25 0,25

<table>
<tr><td rowspan="2">3
(2đ)</td><td>1
(1đ)</td><td>Đổi biến trong hệ tọa độ trụ:
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ $I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)r\,dzdrd\theta$
Đổi biến trong hệ tọa độ cầu :
$\begin{cases} x = \rho.\sin\phi.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\phi.\sin\theta \\ z = \rho.\cos\phi \end{cases}$ $I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2} f(\rho^2).\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$</td><td>0,5
0,5</td></tr>
<tr><td>2
(1đ)</td><td>Z_x, Z_y
$DT = \iint_S dS = \iint_{D:1\le x^2+y^2\le 4} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy$
Đổi biến: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. $DT = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}.rdr = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$</td><td>0,25
0.25
0,5</td></tr>
<tr><td>4
(3đ)</td><td>1
(1.5đ)</td><td>Công cần tính là $I = \oint_L Mdx + Ndy$ với $M = 3x + y^2, N = x - 2y$ và L là biên hình thang ABCD theo chiều ngược chiều kim đồng hồ
Ta có $M_y = 2y, N_x = 1$, phương trình đường $AD: x = y, -1 \le y \le 1$ và $BC: x = 2y+3, -1 \le y \le 1$, đường L kín, chiều dương, giới hạn miền $\Omega: \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2y+3 \end{cases}$
Áp dụng định lý Green: $I = \iint_\Omega (N_x - M_y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_y^{2y+3}(1-2y)dxdy$
$I = \int_{-1}^{1}(1-2y)(y+3)dy = 14/3$</td><td>0,5
0,25
0,75</td></tr>
</table>

	2 **(1.5đ)**	Thông lượng cần tính là $I = \iint_S F \cdot NdS$ với $F = (x+z, x+2y, z+1)$ với mặt $S : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$ và N là vector pháp tuyến đơn vị của S hướng lên. Ta có $divF = 1+2+1 = 4$. Đặt $\bar{S} = S \cup S_0$, trong đó $S_0 : z = 0, x^2+y^2 \leq 1$, hướng xuống. Ta có $\bar{S}$ là mặt kín, hướng ra, giới hạn miền $\Omega : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$. Áp dụng định lý Gauss ta được $\iint_{\bar{S}} F \cdot NdS = \iiint_\Omega divFdV = \iiint_\Omega 4dV = 4V_\Omega = 4.\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi 1^3 = 8\pi/3$ (Vì Ω là nửa hình cầu bán kính bằng 1) Với mặt $S_0 : z = 0, x^2+y^2 \leq 1$, hướng xuống, ta tính được vector pháp tuyến $n = (0,0,-1)$, $F(x,y,z) = (x, 2y+x, 1)$. Thay vào ta được $\iint_{S_0} F \cdot NdS = \iint_D -1dA$, với $D : x^2+y^2 \leq 1$. Tính $\iint_{S_0} F \cdot NdS = \iint_D -1dA = -S_D = -\pi 1^2$ (Vì D là hình tròn bán kính bằng 1) Vậy $I = 8\pi/3 + \pi = 11\pi/3$	**0,25** **0.5** **0,5** **0,25**