

Câu 1. (2 điểm) Trong hệ trục tọa độ Descartes cho các đường cong \mathcal{L} và \mathcal{L}' lần lượt có phương trình.

$$x^2 - y - 4 = 0, \quad x^2 + y - 4 = 0$$

- Tính diện tích miền phẳng được giới hạn bởi các đường cong \mathcal{L} và \mathcal{L}' .
- Tính thể tích khối tròn xoay khi quay miền phẳng giới hạn bởi các đường Ox , \mathcal{L} , $x = 1$ xung quanh trục Ox .

Câu 2. (1.5 điểm) Trong hệ trục tọa độ Descartes, cho đường thẳng $d : x - y = 0$ và nửa đường tròn $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x = 0, y \geq 0$.

Xác định tọa độ cực giao điểm của đường thẳng d và nửa đường tròn \mathcal{C} . Vẽ hình và tính diện tích miền phẳng giới hạn bởi trục Ox , d và \mathcal{C} .

Câu 3. (1 điểm) Tính tích phân suy rộng.

$$\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Câu 4. (1.5 điểm) Giả sử điểm số đạt được của một game thủ theo thời gian (đơn vị giây) tính từ khi trò chơi bắt đầu chạy là nghiệm của bài toán Cauchy

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 4x^2, y(0) = 0.$$

Tính số điểm đạt được của game thủ khi trò chơi bắt đầu được 5 giây.

Câu 5. (1 điểm) Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^4 + 1}$$

Câu 6. (1.5 điểm) Trong không gian \mathbb{R}^3 cho hai vector trực giao $u = 2i + 3j + k, v = i + j - ak$. Tìm a và tính giá trị biểu thức

$$A = \|u \times v\| - 2\|u + v\|.$$

Câu 7. (1.5 điểm) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-4)^n.$$

Cho biết hàm $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}$ là liên tục trên miền $t \in (-1; 1)$ và $\int_0^u f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^u nt^{n-1}dt$ với mọi $u \in (-1; 1)$. Tính $S(x)$ với $|x| < 1$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

| Chuẩn đầu ra của học phần (Về kiến thức) | Nội dung KT |
|--|-------------|
| CLO1: Thiết lập được công thức, tính được diện tích miền phẳng, diện tích mặt tròn xoay, thể tích vật thể, độ dài cung và giải được các bài toán áp dụng tích phân trong vật lý. | Câu 1, 2 |
| CLO2: Tính được tích phân bất định, tích phân xác định, tích phân suy rộng, và khảo sát được sự hội tụ của tích phân suy rộng. | Câu 3 |
| CLO3: Giải được nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 và áp dụng vào các bài toán trong vật lý, kỹ thuật, đời sống. | Câu 4 |
| CLO4: Khảo sát được sự hội tụ của chuỗi số, tính tổng chuỗi số. | Câu 5 |
| CLO5: Tìm được miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, và tìm được khai triển Taylor/Maclaurin của một hàm số. | Câu 7 |
| CLO6: Tính được tích vô hướng và tích có hướng của 2 vectơ trong \mathbb{R}^3 , viết được phương trình mặt phẳng và phương trình đường thẳng trong không gian. | Câu 6 |

TP.HCM, ngày 15 tháng 7 năm 2023

Trưởng bộ môn toán

Phạm Văn Hiển

ĐÁP ÁN

Câu 1. a. Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 4 = 4 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$ ✓

$$\text{Diện tích miền phẳng} = \int_{-2}^2 |(x^2 - 4) - (4 - x^2)| dx = 2 \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}. \quad \checkmark$$

b. Thể tích

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 4)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right) \Big|_0^1 = \frac{203}{15}. \quad \checkmark$$

Câu 2. Tọa độ giao điểm

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = (0; 0) \\ (x, y) = (2; 2) \end{cases}$$

Giao điểm $(0; 0)$, $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. ✓

Phương trình

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, r = 4 \cos \varphi \quad \checkmark$$

$$\text{Diện tích miền phẳng} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (4 \cos \varphi)^2 d\varphi = 4 \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 4 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \pi + 2. \quad \checkmark$$

Câu 3. Tính tích phân suy rộng.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{3} (x^2 - 1)^{3/2} + \sqrt{x^2 - 1} \right] \Big|_{1+\varepsilon}^2 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{3} - \frac{1}{3} (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)^{3/2} - \sqrt{\varepsilon^2 + 2\varepsilon} \right] = 2\sqrt{3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Câu 4. Thừa số tích phân: $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$. ✓

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} &= 4x^2 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} + y = 4x^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(xy) = 4x^2 \quad \checkmark \\ &\Leftrightarrow xy = x^4 + C \quad \checkmark \end{aligned}$$

Thay điều kiện đầu $y(0) = 0$ ta được $C = 0$. Từ đó, ta có $xy = x^4$. Khi $x = 5$ thì $y = 125$. ✓

Câu 5. Với mọi k , ta có đánh giá

$$\left| \frac{n \sin n}{n^4 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^4 + 1} \leq \frac{1}{n^3} \quad \checkmark$$

Chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ là chuỗi hội tụ nên chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \sin n}{n^4 + 1} \right|$ cũng hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh. \checkmark

Từ đó, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^4 + 1}$ hội tụ tuyệt đối. \checkmark

Câu 6. Tìm miền hội tụ. Đặt $X = x - 4$. Xét giới hạn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad \checkmark$$

\Rightarrow bán kính hội tụ $r = 1$.

Khi $X = -1$ chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} nX^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n$ là chuỗi phân kỳ. \checkmark

Khi $X = 1$ chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} nX^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n$ là chuỗi phân kỳ. \checkmark

\Rightarrow miền hội tụ là $-1 < X < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 4 < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$.

Tính tổng chuỗi: Ta có:

$$\int_0^X \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^X nt^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} X^n = \frac{X}{1-X} \quad \checkmark$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nX^{n-1} = \frac{1}{(1-X)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} nX^n = \frac{X}{(1-X)^2} \quad \checkmark$$

Do đó,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-4)^n = \frac{x-4}{(5-x)^2}. \quad \checkmark$$

Câu 7. Do u và v trực giao nên

$$uv = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 5. \quad \checkmark$$

Ta có:

$$u \times v = 14i - 9j - k \Rightarrow \|u \times v\| = \sqrt{278}. \quad \checkmark$$

$$u + v = 3i + 4j - 4k \Rightarrow \|u + v\| = \sqrt{41}. \quad \checkmark$$

Do đó, $A = \|u \times v\| - 2\|u + v\| = \sqrt{278} - 2\sqrt{41}. \quad \checkmark$