

## Đáp án Toán Kinh tế 2 CLC Học kỳ 3 năm học 2022 – 2023

### Câu I (2đ)

1. (1đ) Đặt  $g(S, P) = S^2 e^{3P} + P^3 \ln(S + 2) - C = 0$ . (0,25đ)

Tốc độ thay đổi của P theo S là

$$\frac{dP}{dS} = -\frac{g_S}{g_P} = -\frac{2Se^{3P} + \frac{P^3}{S+2}}{3S^2 e^{3P} + 3P^2 \ln(S+2)}. \quad (0,25+0,5đ)$$

2. Lấy vi phân toàn phần hệ phương trình đã cho, ta có:

$$\begin{aligned} 3dQ_1 + 4dQ_2 + 3dR + 2dS + 5dT &= 0 \\ 2dQ_1 + 3dQ_2 + 4dR + 3dS + 2dT &= 0 \end{aligned} \quad (0,25đ)$$

Để tính  $\frac{\partial Q_1}{\partial T}, \frac{\partial Q_2}{\partial T}$ , từ vi phân toàn phần đặt  $dR = dS = 0$  và thay các  $d$  còn lại bằng

$\partial$  sao cho  $dT = \partial T, dQ_1 = \partial Q_1$  và  $dQ_2 = \partial Q_2$  để thu được:

$$\begin{cases} 3\partial Q_1 + 4\partial Q_2 + 5\partial T = 0 \\ 2\partial Q_1 + 3\partial Q_2 + 2\partial T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\frac{\partial Q_1}{\partial T} + 4\frac{\partial Q_2}{\partial T} = -5 \\ 2\frac{\partial Q_1}{\partial T} + 3\frac{\partial Q_2}{\partial T} = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q_1}{\partial T} = -7, \frac{\partial Q_2}{\partial T} = 4 \quad (0,5đ)$$

Nếu nhiệt độ T tăng 1 đơn vị trong khi lượng mưa R và lượng nắng S không đổi thì sản lượng mận  $Q_1$  giảm 7 đơn vị.

Nếu nhiệt độ T tăng 1 đơn vị trong khi lượng mưa R và lượng nắng S không đổi thì sản lượng xoài  $Q_2$  tăng 4 đơn vị. (0,25đ)

### Câu II. (2đ)

1. (1,5đ)

Đặt hàm Lagrange:

$$\mathcal{L}(\lambda, Q_1, Q_2, P_1, P_2, U_0) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \lambda(U_0 - \sqrt{Q_1 Q_2}). \quad (0,25đ)$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_2} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1 - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = 0 \\ P_2 - \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = 0 \\ U_0 - \sqrt{Q_1 Q_2} = 0 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

Ta giải được các hàm cầu Hicks như sau:

$$\begin{cases} \lambda = 2\sqrt{P_1 P_2} = \lambda^*(P_1, P_2, U_0) \\ Q_1 = U_0 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = Q_1^*(P_1, P_2, U_0) \\ Q_2 = U_0 \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = Q_2^*(P_1, P_2, U_0) \end{cases} \quad (0,75đ)$$

2. (0,5đ) Vì  $Q_1^*(kP_1, kP_2, U_0) = k^0 Q_1^*(P_1, P_2, U_0)$  và  $Q_2^*(kP_1, kP_2, U_0) = k^0 Q_2^*(P_1, P_2, U_0)$  nên  $Q_1^*(P_1, P_2, U_0)$  và  $Q_2^*(P_1, P_2, U_0)$  là các hàm thuần nhất bậc 0. (0,5đ)

### Câu III. (3đ)

#### 1.(1đ)

Giá trị tương lai của dòng tiền là:

$$FV = \int_0^3 e^{-0,05t} e^{0,1(3-t)} dt = e^{0,3} \int_0^3 e^{-0,15t} dt = e^{0,3} \left. \frac{e^{-0,15t}}{-0,15} \right|_0^3 = \frac{e^{0,3}}{0,15} (1 - e^{-0,45}). \quad (0,5đ)$$

Giá trị hiện tại của dòng tiền là:

$$PV = \frac{FV}{e^{rT}} = \frac{1 - e^{-0,45}}{0,15}. \quad (0,5đ)$$

#### 2.(1đ)

$$\pi'(t) = R'(t) - C'(t) = 605 - 5t^2. \quad (0,25đ)$$

$$\text{Vì } \pi'(T) = 0 \text{ nên } 605 - 5T^2 = 0 \Rightarrow T = 11 \text{ (do } T > 0). \quad (0,25đ)$$

Tổng lợi nhuận là:

$$N\pi = \int_0^{11} (605 - 5t^2) dt = \left( 605t - \frac{5t^3}{3} \right) \Big|_0^{11} = \frac{1330}{3} \text{ (triệu đồng)} \quad (0,25đ + 0,25đ)$$

### 3. (1đ)

$$\text{Kỳ vọng } E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \left( \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{1}{4}x} dx. \quad (0,25đ)$$

Sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$E[X] = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{-x e^{-\frac{1}{4}x}}{\frac{1}{4}} \Big|_0^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}x}}{-\frac{1}{4}} dx \right] = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{-e^{-\frac{1}{4}x}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \Big|_0^{x \rightarrow +\infty} \right] = 4. \quad (0,75đ)$$

### Câu IV. (3đ)

1. (1.5đ) Ta có

$$\frac{dR}{dt} + kR = kS.$$

Giá trị bán lại cân bằng là

$$R^* = S. \quad (0,25đ)$$

Hàm giá trị bán lại của máy là

$$R(t) = S + (R(0) - S)e^{-kt} = 0,5 + 15,5e^{-kt}. \quad (0,75đ)$$

$$R(2) = 8 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{15}{31} \right).$$

$$R(t) = 0,5 + 15,5e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{15}{31} \right) t}. \quad (0,25đ)$$

Giá trị bán lại của máy sau 3 năm là:

$$R(3) = 0,5 + 15,5e^{\frac{1}{2} \ln \left( \frac{15}{31} \right) 3} \approx 5,717 \text{ (triệu đồng)}. \quad (0,25đ)$$

2. (1.5đ)

Giá cân bằng là  $P^* = \frac{50}{10} = 5$ . (0,25đ)

Giải phương trình đặc trưng

$k^2 + 7k + 10 = 0$  ta được  $k_1 = -2, k_2 = -5$ . (0,5đ)

Nghiệm của phương trình có dạng là:

$P(t) = 5 + A_1e^{-2t} + A_2e^{-5t}$ . (0,25đ)

Ta có  $\begin{cases} P(0) = 8 \\ P'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + A_1 + A_2 = 8 \\ -2A_1 - 5A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{16}{3} \\ A_2 = -\frac{7}{3} \end{cases}$ .

Vì thế  $P(t) = 5 + \frac{16}{3}e^{-2t} - \frac{7}{3}e^{-5t}$ . (0,5đ)