

Câu 1 (1,5 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính

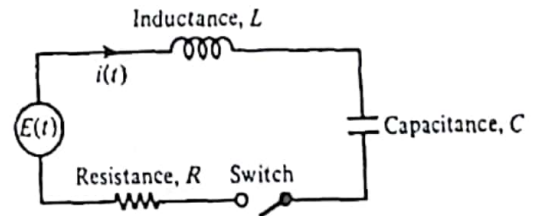
$$\begin{cases} x + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ m^2x + y + z = m^2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Câu 2 (2 điểm) Cho mạch điện RLC như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t), \quad I(t) = \frac{dq}{dt} \quad \text{với } q(0) = 0, I(0) = 0.$$

Giải phương trình vi phân để tìm $q(t), I(t)$ biết $R = 40\Omega$,

$$L = 1H, C = 16 \times 10^{-4}F, E(t) = 12 \sin 5t \text{ (volts)}.$$



Câu 3 (2 điểm) (Mô hình dao động) Giải phương trình vi phân

$$y'' + 8y' + 15y = 6 + e^{-t} + \sin 10t \quad \text{với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn, nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t . Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Câu 4 (3 điểm)

a) Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' - 6y = 2e^{-t} \\ x + y' + 5y = 1 \end{cases} \quad \text{với điều kiện } x(0) = 0, y(0) = 0$$

b) Giải phương trình tích phân

$$y(t) = 2 + e^{-t} + 10 \int_0^t y(u) \cos 3(t-u) du$$

Câu 5 (1,5 điểm) (Mô hình logistic có thu hoạch-Logistic growth with harvesting)

Bạn tham gia vào một dự án chăm sóc, bảo tồn, khai thác/thu hoạch phát triển bền vững một nguồn tài nguyên của đất nước. Giả sử lượng tài nguyên (tạm sử dụng đơn vị là: đơn vị tài nguyên) ở thời điểm t (đơn vị tính là năm) tính từ năm 2023 (tức là năm 2023 ứng với $t = 0$), được xấp xỉ bởi hàm $y(t)$, thỏa phương trình vi phân logistic có thu hoạch

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - h, \quad y(0) = y_0 \quad (\text{lượng tài nguyên hiện tại là } y_0 \text{ đơn vị})$$

a) Hãy viết lại phương trình cho gọn khi $r = 0.6e^{-0.1t}$, $K = 120$, $y(0) = y_0 = 50$, $h = 0.2e^{-0.1t}y$.

b) Từ phương trình ở (a), lần lượt áp dụng phương pháp Euler (RK1) và phương pháp Euler cải tiến (RK2) với bước nhảy $h = 1$ đồng thời sử dụng máy tính (Casio), ước tính lượng tài nguyên các năm tiếp theo từ 2024 đến 2028. Cụ thể, trình bày vào bài thi bằng cách kẻ lại các bảng sau đây và điền đầy đủ những chỗ còn trống.

Công thức Euler (RK1) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n$ = giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK1)
Công thức Euler cải tiến (RK2) (giá trị đúng = $y(t_n) \approx y_n$ = giá trị gần đúng)	Bấm để màn hình Casio hiển thị (chưa chạy thuật toán) (RK2)

Tiếp theo bấm CALC (chạy thuật toán) rồi điền kết quả đầy đủ vào bảng sau, lấy 2 chữ số sau dấu chấm “.” thập phân:

Năm	t_n	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler (Euler's Method) (đơn vị tài nguyên)	Giá trị gần đúng theo phương pháp Euler cải tiến (Improved Euler's Method) (đơn vị tài nguyên)
2023	0	50	50
2024	1		
2025	:		
2026			
2027			
2028			

❖ Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi