

Câu 1 (2.0 điểm). Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ t & 2 \\ 5 & 2t \end{pmatrix},$$

trong đó m, t là các hằng số thực.

- Xác định m để ma trận A khả nghịch.
- Thực hiện phép tính AD .
- Tìm m để hệ phương trình $AX = [0]$ có vô số nghiệm

Câu 2 (3.0 điểm). Giải các phương trình vi phân sau

- $y''(x) + 2y'(x) - 3y = \sin(x)$. (yêu cầu dùng phương pháp hệ số bất định)
- $(x^2 + y^2)dx = (e^y - 2xy)dy$

Câu 3 (2.0 điểm). Cho biết biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\{f(t)\})$ (nếu tồn tại).
Áp dụng phép biến đổi Laplace giải bài toán sau:

$$t \frac{d^2y}{dt^2} - t \frac{dy}{dt} + y = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4$$

theo các bước:

- Chứng minh rằng, sau khi lấy Laplace hai vế phương trình vi phân, ta có

$$Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2}$$

trong đó $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- Giải phương trình ở bước trên
- Lấy Laplace ngược

Câu 4 (2.0 điểm). Một bể có thể tích 1500 lít ban đầu chứa 600 lít nước với 5 kg muối hòa tan trong đó. Cho chảy vào bể dung dịch nước muối với tốc độ 6 (lít/giờ). Đồng thời, dung dịch trong bể được trộn đều và cho chảy ra khỏi bể với tốc độ 3 lít/giờ. Ở thời điểm sau t giờ từ lúc cho dung dịch chảy vào, gọi $y(t)$ (kg) là lượng muối trong bể và $f(t)$ (kg/lít) là nồng độ muối của dung dịch chảy vào. Khi đó $y(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân tuyến tính sau:

$$y'(t) = 6f(t) - 3 \frac{y(t)}{600 + 3t}.$$

Cho biết $f(t) = \frac{1}{t+1}$. Sinh viên hãy:

1. giải phương trình tìm $y(t)$.
2. tính nồng độ muối trong bể sau 1 giờ từ lúc dung dịch chảy vào.
3. tính lượng muối trong bể ở thời điểm bể đầy.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho bài toán giá trị ban đầu

$$y' = x^2y - \ln(y), \quad y(0) = 4.$$

Tính gần đúng giá trị của nghiệm $y(0.5)$ với độ chính xác đến 4 chữ số thập phân bằng phương pháp Euler với bước chia $h = 0.1$.
Anh/Chị hãy trình bày kết quả như sau:

Công thức vòng lặp $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = \dots$
Bảng giá trị của từng bước lặp

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[LO 1. 1]: Áp dụng được các tính chất cơ bản của ma trận và định thức, giải được hệ phương trình tuyến tính	Câu 1
[LO 1.2]: Giải được phương trình vi phân	Câu 2, 4, 5
[LO 1.3, 2.3]: Áp dụng được phép biến đổi Laplace	Câu 3

Ngày 4 tháng 5 năm 2025
Thông qua Trưởng bộ môn