

ĐÁP ÁN ĐSTT-CTĐS (Hệ CLC và ĐT)

Mã môn học: MATH143001

Ngày thi: 12/6/2025

Câu	Ý	Đáp án (tóm tắt)	Điểm
I	a	$\mathcal{S}$ không là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^{2025}$, vì $0_{\mathbb{R}^{2025}} \notin \mathcal{S}$.	1.0
	b	Số hoá "NU", "ME", "RO", "US" ta được $\begin{bmatrix} 13 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \end{bmatrix}$	0.5
		$K \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 21 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} V \\ B \end{bmatrix}$	1.0
		$K \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix}$	
		$K \begin{bmatrix} 17 \\ 14 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} F \\ B \end{bmatrix}$	
		$K \begin{bmatrix} 20 \\ 18 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} M \\ S \end{bmatrix}$	
		Vậy tin nhắn sau khi mã hoá là "VBSSFBMS".	0.5
II	a	$\text{Ker } f = \{u = (a; b)^T \in \mathbb{R}^2 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \text{span}\{v = (2; 1)^T\}$.	1.0
		$\dim \text{Ker } f = 1$ và $\{v = (2; 1)^T\}$ là một cơ sở của $\text{Ker } f$.	0.5
	b	$\text{Im } f = \{f(u) \in \mathbb{R}^2 / u = (a; b)^T \in \mathbb{R}^2\}$ $= \text{span}\{w_1 = (1; -2)^T, w_2 = (-2; 4)^T\}$.	1.0
		Hệ $\{w_1\}$ là một cơ sở của $\text{Im } f$. Hạng của f là $r(f) = \dim \text{Im } f = 1$.	0.5
III	a	$h(X) = X^T A X = -3x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_2x_3$.	0.5
	b	Giải phương trình đặc trưng $ A - \lambda I_3 = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$ tìm được 3 trị riêng $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$.	0.5
		$V_{\lambda=-3} = \{a.(1; 0; 0)^T / a \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=-3}$ là $X_1 = (1; 0; 0)^T$	1.0
		$V_{\lambda=4} = \{b.(0; -2; 1)^T / b \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=4}$ là $X_2 = (0; -2; 1)^T$	
		$V_{\lambda=9} = \{c.(0; 1; 2)^T / c \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=9}$ là $X_3 = (0; 1; 2)^T$	
		Đặt $Y_1 = \frac{X_1}{\ X_1\ } = (1; 0; 0)^T, Y_2 = \frac{X_2}{\ X_2\ } = (0; \frac{-2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}})^T, Y_3 = \frac{X_3}{\ X_3\ } = (0; \frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})^T$ và $P = (Y_1 Y_2 Y_3)$ là một ma trận trực giao.	0.5
		Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = P^T A P$.	0.5
		Phép đổi biến $X = PY$, với $Y = (y_1; y_2; y_3)^T$ đưa $h(X)$ về dạng chính tắc $h_{CT}(Y) = -3y_1^2 + 4y_2^2 + 9y_3^2$.	
	c	Theo câu (b) ta có $P^{-1}AP = D$, suy ra $D^{2024} = P^{-1}A^{2024}P = \begin{bmatrix} 3^{2024} & 0 & 0 \\ 0 & 4^{2024} & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2024} \end{bmatrix} = P^T A^{2024} P$. Chứng tỏ A^{2024} được chéo hoá trực giao bởi ma trận trực giao P , có ma trận đường chéo là D^{2024} . $\det(A^{2024}) = 108^{2024}$.	0.5