

ĐÁP ÁN TOÁN 2 CÁC LỚP ĐẠI TRÀ THI NGÀY 12/06/2023 – Đề 2

Câu	Nội dung	Điểm
1a.	<p>Giao điểm của hai đường $y = x^2$ và $y = 2x^3 - x$ liên quan đến miền D là $(0,0)$ và $(1,1)$ (giao điểm $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ không liên quan đến miền D).</p> <p>Diện tích miền D:</p> $S = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big _0^1 = \frac{1}{3}.$ <p>Như vậy diện tích phần sẫm màu là $4/3$. Diện tích mặt sàn bằng $2^2 = 4$ nên tỷ lệ giữa diện tích bốn cánh và sân là $4/3:4=1/3$.</p>	<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p>
1b.	<p>Sử dụng công thức ống trụ, thể tích của vật thể khi quay miền D quanh Oy:</p> $S = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - 2x^3 + x) dx$ $= 2\pi \left(-\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big _0^1 = \frac{11\pi}{30}.$	<p>0.5</p> <p>0.5</p>
2	<p>Hai đường $r = 4 \sin \theta$ và $r = 1 + 2 \sin \theta$ cắt nhau tại $\theta = \frac{\pi}{6}$ và $\theta = \frac{5\pi}{6}$.</p> <p>Diện tích phần cần tính</p> $S = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [(4 \sin \theta)^2 - (1 + 2 \sin \theta)^2] d\theta$ $= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} [12(\sin \theta)^2 - 4 \sin \theta - 1] d\theta$ $= \frac{1}{2} (5x - 3 \sin 2x + 4 \cos x) \Big _{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}.$	<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p>
3a.	$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(4 + \ln^2 x)} = \int_2^{\infty} \frac{du}{u^2 + 4}$ $= \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{u}{2} \Big _2^{\infty}$ $= \frac{1}{2} \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \tan^{-1} \frac{u}{2} - \tan^{-1} 1 \right) = \frac{\pi}{8}.$	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p>
3b.	$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2} - \frac{2}{x - 3}$	<p>0.5</p>

	$I = \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} - 2 \ln x - 3 + C$ -Thiếu C (-0.25), thiếu . tha	0.5
4.	$\frac{dP}{dt} = \frac{1-P}{4} \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} + 0.25P = 0.25$. Chọn thừa số tích phân là $I(t) = e^{0.25t}$. Nghiệm của phương trình là $P(t) = \frac{1}{e^{0.25t}} [\int 0.25e^{0.25t} dt + C] = 1 + \frac{C}{e^{0.25t}}$. $P(0) = 0 \Rightarrow C = -1 \Rightarrow P(t) = 1 - \frac{1}{e^{0.25t}}$. $P = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{e^{0.25t}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 4 \ln 2 \approx 2.77$.	0.5 0.5 0.25 0.25
5a.	Ta có $\cos(k\pi) = (-1)^k$ $S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$ $S = \frac{-1/5}{1 + 1/5} + \frac{2/5}{1 - 2/5} = \frac{1}{2}$	0.25 0.5 0.25
5b.	Bán kính hội tụ $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left \frac{a_k}{a_{k+1}} \right = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{5^{k+1}(2k+1)}{5^k(2k-1)} = 5$ Khoảng hội tụ của (2) là $(-5, 5)$. Tại $X = 5$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)}$, là một chuỗi hội tụ theo Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu. Tại $X = -5$, chuỗi đã cho trở thành $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)}$, là một chuỗi phân kỳ theo Tiêu chuẩn so sánh giới hạn (so sánh với chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$). Vậy tập hội tụ của (2) là $(-5, 5]$, do đó tập hội tụ của chuỗi (1) là $(-7, 3]$.	0.5 0.25 0.25 0.25 0.25
6.	Giả sử D có tọa độ (x, y, z) . Từ $A(-2; 1; 1)$, $B(1; 5; 2)$ và $C(-3; 0; 1)$ ta có $\overrightarrow{AB} = \langle 3, 4, 1 \rangle$, $\overrightarrow{DC} = \langle -3 - x, -y, 1 - z \rangle$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, do đó ta có $x = -6, y = -4$ và $z = 0$. Ta có $\overrightarrow{AC} = \langle -1, -1, 0 \rangle$, do đó $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S = \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ = \sqrt{3}$.	0.25 0.5 0.25