

ĐÁP ÁN

Câu 1 (2.0 điểm).

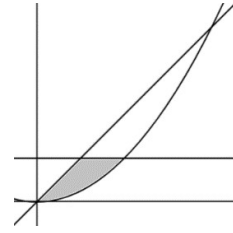
a. (1 điểm) $A = \int_0^1 (2\sqrt{y} - y) dy$ (0.5 điểm)

$$= \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Hoặc

$$\int_0^1 \left(x - \left(\frac{x^2}{4} \right) \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \left(\frac{x^2}{4} \right) \right) dx \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{6}. \quad (0.5 \text{ điểm})$$



b. (1 điểm) Sử dụng phương pháp lát cắt

$$V = \pi \left(\int_0^1 \left(x^2 - \left(\frac{x^4}{16} \right) \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \left(\frac{x^4}{16} \right) \right) dx \right) \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$= \pi \left[\left(x^3 / 3 - x^5 / 80 \right) \Big|_0^1 + \left(x - x^5 / 80 \right) \Big|_1^2 \right] \quad (0.25 \text{ điểm})$$

$$= \pi \left(77 / 240 + 49 / 80 \right) = \frac{14}{15} \pi. \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Câu 2 (1.0 điểm).

- Giải phương trình giao điểm được $\cos \theta = \frac{1}{2}$,

$$\text{suy ra } \theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi. \quad (0.25 \text{ điểm})$$

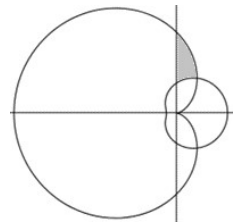
- Diện tích miền cần tính

$$A = \frac{1}{2} \times \left[\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (8 - 8 \cos \theta)^2 d\theta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3 + 2 \cos \theta)^2 d\theta \right] \quad (0.25 \text{ điểm})$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(96\theta - 128 \sin \theta + 16 \sin 2\theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(11\theta + 12 \sin \theta + \sin 2\theta \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(48\pi / 3 - 128 + 56\sqrt{3} \right) - \left(11\pi / 6 + 12 - 13\sqrt{3} / 2 \right) \right]$$

$$= 85\pi / 12 - 70 + 125\sqrt{3} / 4. \quad (0.5 \text{ điểm})$$



Câu 3 (1.5 điểm).

Phương trình đã cho là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 dạng $y' + p(x)y = q(x)$, trong đó $p(x) = -2x$, $q(x) = 2x^3$.

$$\text{Thừa số tích phân } I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Nghiệm tổng quát :

$$y = e^{x^2} \left(C + 2 \int x^3 e^{-x^2} dx \right) = e^{x^2} [C + (-x^2 - 1)e^{-x^2}]$$

$$= C e^{x^2} - x^2 - 1. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow C - 1 = 2 \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy nghiệm của bài toán đã cho là: } y = 3e^{x^2} - x^2 - 1. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Câu 4 (1.0 điểm).

Ta có

$$f(x) = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 - x + 1} > 0, \forall x \geq 1.$$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right) = 1. \quad (0.75 \text{ điểm})$$

$$\text{Do } \int_1^\infty g(x) dx \text{ hội tụ nên } \int_1^\infty f(x) dx \text{ hội tụ.} \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Câu 5 (3.5 điểm).

a. Áp dụng tiêu chuẩn tỉ số

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} + 1}{(k+1)5^{k+1}} \cdot \frac{k5^k}{2^k + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} + 1}{2^k + 1} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}. \quad (0.5đ)$$

$$\text{Do } L < 1 \text{ nên chuỗi đã cho hội tụ.} \quad (0.25đ + 0.25đ)$$

Hoặc

Áp dụng tiêu chuẩn căn (hoặc tỷ số) cho các chuỗi dương $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{5}\right)^k$ và $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{5}\right)^k$ ta lần lượt được $L = 2/5$ và $L = 1/5$, do đó chuỗi đã cho hội tụ. (1 điểm)

Chuỗi số đã cho $\sum_{k=1}^\infty \frac{2^{k+1}}{k \cdot 5^k} = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{5}\right)^k$. Thay $x = \frac{2}{5}$ và $x = \frac{1}{5}$ vào công thức khai triển đã cho ta có

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{5}\right)^k = -\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \ln \frac{5}{3}; \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{5}\right)^k = -\ln\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \ln \frac{5}{4} \quad (0.5 \text{ điểm})$$

$$\text{Vậy } \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{k+1}}{k \cdot 5^k} = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{5}\right)^k = \ln \frac{5}{3} + \ln \frac{5}{4} = \ln \frac{25}{12}.$$

b. Bán kính hội tụ $R = 5$, khoảng hội tụ của chuỗi (*) là $(-2, 8)$. (0.5 điểm)

Tại $x = -2$ chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn chuỗi đan dấu. (0.25 điểm)

Tại $x = 8$ chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Chuỗi này phân kỳ (so sánh với p-chuỗi, $p = \frac{1}{2}$). (0.25 điểm)

Chuỗi đã cho hội tụ với $-2 \leq x < 8$. (0.25 điểm)

Hoặc

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{k+1}}{5^{k+1} \cdot \sqrt{k+2}} \cdot \frac{5^k \cdot \sqrt{k+1}}{(x-3)^k} \right| = \frac{|x-3|}{5}. \quad (0.25đ)$$

$$L < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 8, \text{ chuỗi hội tụ.} \quad (0.25\text{đ})$$

Tại $x = -2$ chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn chuỗi đan dấu.
(0.25 điểm)

Tại $x = 8$ chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Chuỗi này phân kỳ (so sánh với p-chuỗi, $p = \frac{1}{2}$).
(0.25 điểm)

Chuỗi đã cho hội tụ với $-2 \leq x < 8$. (0.25 điểm)

(Tại mỗi đầu mút, phải trình bày phân xét sự hội tụ của chuỗi số rõ ràng mới cho 0.25đ).

Sinh viên có thể hiểu chuỗi trong đề thành chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{5 \cdot \sqrt[k]{k+1}}$, do đó nếu sinh viên làm bài với chuỗi này, vẫn chấm điểm với số điểm thành phần tương ứng như chuỗi phía trên).

c. Ta có $\sin u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} u^{2k+1}$ với mọi u . (0.25 điểm)

Áp dụng phân tích này ta có :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \sin(3x) = \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (3x)^{2k+1} = \frac{-5x}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 3^{2k+1} x^{2k+1}, \quad \text{với}$$

mọi x . (0.5 điểm)

Câu 6 (1.0 điểm).

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \langle 8 - 3a; 1; a - 4 \rangle \quad (0.25 \text{ điểm})$$

Để ba véctơ đã cho đồng phẳng ta phải có

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 13a - 14 = 0. \quad (0.5 \text{ điểm})$$

Vậy với $a = 2$ và $a = 7/3$ thì ba véctơ đã cho đồng phẳng. (0.25 điểm)