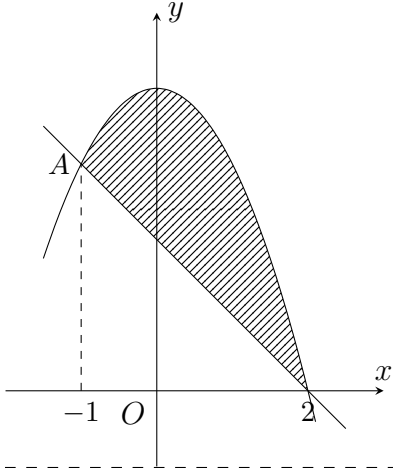


**ĐÁP ÁN ĐỀ TOÁN 2 CUỐI HỌC KỲ II- NĂM HỌC 2023-2024**  
**Ca thi: 9g45. Ngày thi: 20/05/2024**

Câu	Nội dung	Điểm
1a	Tính diện tích miền $D$	
	 <p style="text-align: center;">Các giao điểm <math>A(-1; 3), B(2, 0)</math></p>	0.5
	$S = \int_{-1}^2 [(4 - x^2) - (2 - x)] dx = \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big _{-1}^2 = \frac{9}{2}$	0.5
1b	Tính thể tích của vật thể khi quay $D$ quanh $Ox$	
	$V = \pi \int_{-1}^2 [(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx = \pi \int_{-1}^2 (x^4 - 9x^2 + 4x + 12) dx$	0.5
	$= \left( \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 12x \right) \Big _{-1}^2$	0.25
	$V = \frac{108\pi}{5}$	0.25
	<b>Thể tích vật thể khi quay <math>D</math> quanh <math>Oy</math></b>	
	$V = 2\pi \int_0^2 x[(4 - x^2) - (2 - x)] dx$	0.5

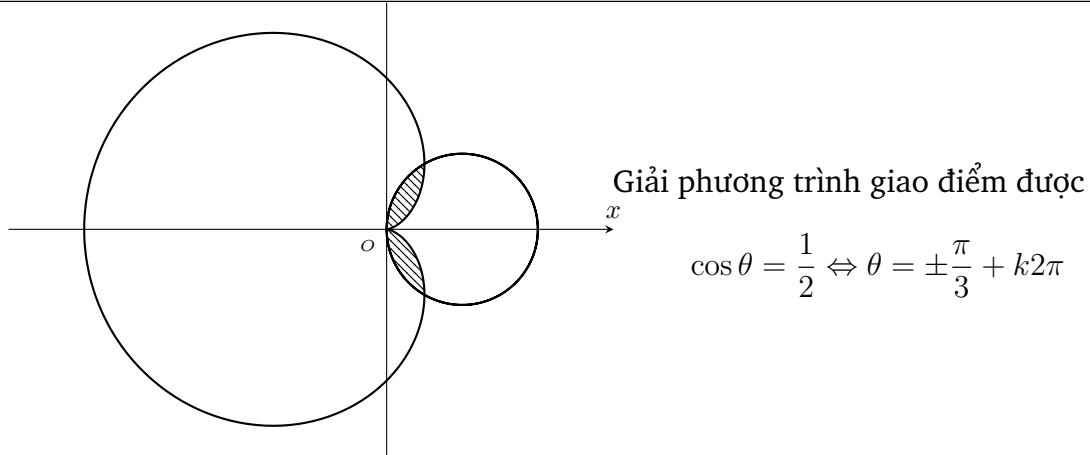
$$= 2\pi \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx = 2\pi \left( -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2$$

0.25

$$V = \frac{16\pi}{3}$$

0.25

**2** Diện tích miền phẳng nằm phía trong cả hai đường cong  $r = 2 \cos \theta$  và  $r = 2 - 2 \cos \theta$  trong hệ tọa độ cực



0.25

Do tính đối xứng, diện tích miền cần tính là:

$$S = \int_0^{\pi/3} (2 - 2 \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (2 \cos \theta)^2 d\theta$$

0.25

$$S = \left( 2\pi - \frac{7\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

0.5

**3** Tính độ dài cung

$$y'(x) = \sqrt{x}$$

0.25

Độ dài cung này là

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + x} dx$$

0.25

	$= \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \Big _1^4 = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$	0.5
<b>4a</b>	Lượng muối trong thùng tại thời điểm ban đầu là $y(0) = 200 \times 4 = 800(g)$	0.25
<b>4b</b>	Tìm lượng muối ở thời điểm $t$	
	<p>Gọi <math>y(t)</math> là lượng muối ở thời điểm <math>t</math> (phút). Ta có phương trình vi phân</p> $\frac{dy}{dt} = 24 - \frac{8y}{200}$	0.5
	<p>Nghiệm tổng quát</p> $y(t) = 600 + Ce^{-x/25}$	0.5
	<p>Từ <math>y(0) = 800</math>, ta tìm được <math>C = 200</math>. Vậy nghiệm riêng của phương trình vi phân là</p> $y = 600 + 200e^{-x/25}$	0.25
<b>5</b>	Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng	
	<p>Đặt <math>g(x) = \frac{1}{x \ln^5 x}</math> và <math>f(x) = \frac{x \ln^2 x}{(x-1)(x \ln^7 x + 3)}</math> thì <math>f(x) &gt; 0, g(x) &gt; 0</math> với mọi <math>x \geq 2</math>.</p>	0.25
	<p>Ta có</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$	0.25
	<p>Mặt khác</p> $\int_2^{+\infty} g(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^5 x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{4 \ln^4 x} \Big _2^t = \frac{1}{4 \ln^4(2)}$ <p>hội tụ nên tích phân đã cho hội tụ.</p>	0.25 0.25
<b>6a</b>	Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa	
	Bán kính hội tụ $R = 5$	0.5
	Tại $x = 9$ chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + 2}$ hội tụ theo Tiêu chuẩn Leibnitz	0.25
	Tại $x = -1$ , chuỗi trở thành $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2 + 2} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ . Do chuỗi $\sum_{k=1}^{+\infty}  a_k $ hội tụ nên $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ hội tụ tuyệt đối.	0.5

	Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $-1 \leq x \leq 9$	0.25
<b>6b</b>	Tìm khai triển Maclaurin	
	Ta có $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k, \quad -1 < u < 1$	0.25
	Áp dụng phân tích này ta có: $f(x) = x \left( \frac{1}{1+3x} \right) = x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (3x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 3^k x^{k+1}$	0.5
	Chuỗi hội tụ khi $-1 < 3x < 1$ hay $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ .	0.25
<b>7</b>	Tìm điều kiện của $m$ để $S = 5\sqrt{2}/2$ .	
	Ta có $\vec{AB} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ , $\vec{AC} = \langle m, 1, 2 \rangle$ và $\vec{AB} \times \vec{AC} = \langle 5, m+2, -1-3m \rangle$	0.5
	Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \ \vec{AB} \times \vec{AC}\  = \frac{1}{2} \sqrt{10m^2 + 10m + 30}$	0.25
	Để $S = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ta cần $S^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{4}(m^2 + m + 3) = \frac{25}{2}$ hay $m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -2$ .	0.25