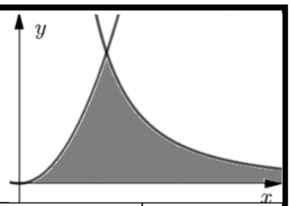
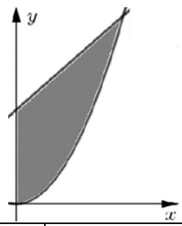
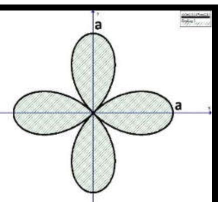
ĐÁP ÁN MÔN TOÁN 2. MÃ HỌC PHẦN: MATH132501. NGÀY THI: 28/05/2024

Câu 1 (1.5 *điểm*). Tính diện tích phần hình phẳng nằm bên phải trục tung giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}$ và trục hoành (phần tô màu trong hình bên). 	
Hai đường $y = x^2, y = \frac{1}{x^2}$ cắt nhau tại (1,1) (bên phải trục tung); (*SV không giải nhưng các cận lấy tích phân đúng hoặc thể hiện tọa độ giao điểm trên hình vẽ thì cho đủ điểm*)	0.25
Diện tích phần hình phẳng đã cho $A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = A_1 + A_2$	0.25
$$A_1 = \frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{3}$$	0.25
$$A_2 = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big\vert_1^N\right) = \lim_{N\to\infty}\left[-\left(\frac{1}{N} - 1\right)\right] = 1$$	0.5
Vậy $A = 1/3 + 1 = 4/3$. (*SV tính theo biến y vẫn cho điểm tương tự như cách tính theo biến x*)	0.25
Câu 2 (1.0 *điểm*). Cho D là phần miền phẳng nằm bên phải trục tung của miền giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $x - y + 2 = 0$ (phần tô màu trong hình bên). Gọi Ω là vật thể tạo thành khi quay miền D quanh Oy. Tính thể tích của Ω. 	
Giao điểm của hai đường $y = x^2$ và $x - y + 2 = 0$ là $A(2,4)$ (chỉ tính phần bên phải trục tung). (*SV không giải nhưng các cận lấy tích phân đúng hoặc thể hiện tọa độ giao điểm trên hình vẽ thì cho đủ điểm*)	0.25
Thể tích của Ω (sử dụng công thức ống trụ): $$V = \int_0^2 2\pi x[(x+2) - x^2]dx$$	0.5
$$= 2\pi\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big\vert_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$ (*Nếu thí sinh ghi ngay kết quả mà không tính cụ thể tích phân thì trừ 0.25*)	0.25

Câu 3 (1.5 *điểm*). Trong hệ tọa độ cực, cho đường cong hoa hồng bốn cánh $r = a\cos(2\theta)$ $(a > 0)$. Tìm điều kiện của đường kính mỗi cánh hoa, tức tham số a, để tổng diện tích tất cả các cánh hoa này bằng diện tích của hình tròn đơn vị (hình tròn có bán kính bằng 1). 	
Giải phương trình $r = 0$ ta được $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Cánh bên phải của hoa hồng bốn cánh $r = a\cos(2\theta)$ ứng với $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$. *(Không trừ điểm nếu SV có chỉ ra góc cực ứng với một cánh đại diện nào đó mà không giải, còn nếu không nói gì mà ghi ngay cận lấy tích phân thì trừ 0.25. Sinh viên cũng có thể không cần phải giải nếu tính luôn diện tích cả bốn cánh hoa cùng một lúc bằng cách lấy tích phân từ 0 tới 2π.)*	0.5
Do đó diện tích của cả bốn cánh hoa là $S = 4.\frac{1}{2}.\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a\cos 2\theta)^2 d\theta$	0.5
$= a^2\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right)\Big\|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2\pi}{2}.$	0.25
Để diện tích bông hoa này bằng diện tích hình tròn đơn vị $(\pi \cdot 1^2 = \pi)$ ta cần có $\frac{a^2}{2} = 1$ hay $a = \sqrt{2}$.	0.25
Câu 4 (1.5 *điểm*). Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y' - 2xy = e^{x^2} - 2x$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1$.	
Phương trình vi phân có dạng tuyến tính $y' + P(x)y = Q(x)$, trong đó $P(x) = -2x$, $Q(x) = e^{x^2}$. *(Không xác định $P(x), Q(x)$ nhưng dưới vẫn thể hiện đúng thì vẫn cho điểm bước này)*	0.25
Tính $e^{\int P(x)dx}$, chọn thừa số tích phân $I(x) = e^{-x^2}$.	0.25
Tính $\int Q(x) \cdot I(x)\, dx = \int\left(1 - 2xe^{-x^2}\right) dx = x + e^{-x^2} + C$	0.5
Nghiệm tổng quát $y(x) = e^{x^2}\left(x + e^{-x^2} + C\right)$.	0.25
Với điều kiện đầu $y(0) = -1$ ta giải được $C = -2$. Nghiệm của bài toán là $y = e^{x^2}\left(x + e^{-x^2} - 2\right)$ hay $y = (x-2)e^{x^2} + 1$.	0.25
Câu 5 (1.0 *điểm*). Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{\infty} \frac{5 + 2\sin x}{\sqrt{2x+1}} dx.$	
Hàm lấy tích phân $f(x) = \frac{5+2\sin x}{\sqrt{2x+1}} \ge 0, \forall x \ge 1$.	0.25
Ta có $f(x) \ge \frac{3}{\sqrt{2x+1}} \ge \frac{3}{\sqrt{3x}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} := g(x) > 0, \forall x \ge 1$	0.5

(Có thể dùng tiêu chuẩn so sánh giới hạn cho các hàm $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ và $\frac{1}{\sqrt{x}}$).	
Do $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kỳ ($\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ với $p = \frac{1}{2} \le 1$), nên $\int_1^\infty g(x)dx$ phân kỳ, do đó tích phân đã cho phân kỳ theo Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp.	0.25
Câu 6 (2.5 *điểm*). **a.** (**1.0 *điểm***) Cho biết $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^\infty \frac{u^k}{k!}$, với mọi $u \in \mathbb{R}$. Hãy chứng tỏ chuỗi sau hội tụ và tính tổng của nó: $$\sum_{k=0}^\infty \frac{5^k - 1}{2^k \cdot k!}.$$ **b.** (**1.5 *điểm***) Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $$\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k}{k^2+1}(2x+5)^k.$$	
a. Chuỗi $\sum_{k=0}^\infty \frac{5^k}{2^k \cdot k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^k}{k!} = e^{\frac{5}{2}}$ (chuỗi hội tụ vì tương ứng với $u = \frac{5}{2}$ trong công thức khai triển e^u).	0.25
Chuỗi $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k \cdot k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = e^{\frac{1}{2}}$ (chuỗi hội tụ vì tương ứng với $u = \frac{1}{2}$ trong công thức khai triển e^u). (*Có thể dùng Tiêu chuẩn tỷ số để chứng minh chung cho cả 2 ý ở trên*)	0.25
Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng $$\sum_{k=0}^\infty \frac{5^k - 1}{2^k \cdot k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{5^k}{2^k \cdot k!} - \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k \cdot k!} = e^{\frac{5}{2}} - e^{\frac{1}{2}}.$$ (*Nếu chưa chỉ ra chuỗi hội tụ nhưng SV đã tách chuỗi đã cho thành tổng/hiệu hai chuỗi thì trừ 0.25*)	0.5
b. Chuỗi lũy thừa đã cho, ký hiệu là (1) có dạng $\sum_{k=0}^\infty a_k X^k$ (2), trong đó $a_k = (-1)^k \frac{k}{k^2+1}, X = 2x + 5$. Ta có $\lim_{k\to\infty} \left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert = \cdots = 1$. Bán kính hội tụ của chuỗi (2) là $R = 1$. *(Sv có thể dùng tiêu chuẩn căn/tỷ số tổng quát thay cho việc tìm bán kính hội tụ)*	0.25
Tại $X = -1$, chuỗi (2) trở thành $\sum_{k=0}^\infty \frac{k}{k^2+1}$. Chuỗi này phân kỳ theo Tiêu chuẩn so sánh (*cần viết rõ việc sử dụng Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp hoặc so sánh giới hạn với chuỗi* $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k}$).	0.5
Tại $X = 1$, chuỗi (2) trở thành $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$. Chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu (*cần chỉ rõ đây là chuỗi đan dấu, cần chứng minh dãy* $\{a_k\}$ *giảm về 0*).	0.5
Miền hội tụ của chuỗi (2) là $(-1,1]$, do đó, miền hội tụ của chuỗi (1) là $(-3,-2]$.	0.25

Câu 7 (1.0 *điểm*). Trong $\mathbb{R}^3$ với một hệ tọa độ Descartes Oxyz cho các điểm $A(2,1,3), B(-2,1,1)$. Tìm điểm C trên chiều dương của trục Oz sao cho thể tích của hình hộp tạo thành từ ba véctơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$ bằng 20.	
Gọi tọa độ của C là $(0,0,a), a > 0$. Ta có $\overrightarrow{OA} = \langle 2,1,3\rangle, \overrightarrow{OB} = \langle -2,1,1\rangle, \overrightarrow{OC} = \langle 0,0,a\rangle$.	0.25
Thể tích của hình hộp tạo thành từ ba véctơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OC}$: $$V = \left\lvert\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)\right\rvert = \left\lvert\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}\right\rvert = \lvert 4a\rvert = 4a.$$ (*Cho 0.25 nếu SV chỉ tính được tích có hướng của hai véctơ nào đó*)	0.5
Để thể tích hình hộp này bằng 20 ta cần có $a = 5$.	0.25