TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ II

NĂM HỌC 2017–2018

Môn: Giải tích 2 (14/06/2018)

Mã môn học: MATH130701

Câu	**Đáp Án**	**Điểm**
Câu 1	a) Hàm số $f(x,y)$ liên tục tại $(0,0)$ khi và chỉ khi $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$	0.5
	Mặt khác, ta có $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = 1.$$ Vì vậy $f(0,0)=1.$	0.5
	b) Ta có $$f_x(x,y) = 2x+y,\ f_y(x,y) = x+2y.$$ Giải hệ phương trình $$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$ Suy ra $(0,0)$ là điểm kỳ dị nằm trên biên của miền *D*.	0.5
	Trên biên $OA: y=0, 0\le x\le 1.$ Ta có $$f_{OA}(x) = f(x,0) = x^2,\ 0\le x\le 1.$$ Suy ra $$\max_{x\in[0,1]} f_{OA}(x) = 1 \text{ tại } x=1, \text{ và } \min_{x\in[0,1]} f_{OA}(x) = 0 \text{ tại } x=0.$$ Trên biên $AB: x=1, 0\le y\le 1.$ Ta có $$f_{AB}(y) = f(1,y) = y^2+y+1,\ 0\le y\le 1.$$ Suy ra $$\max_{y\in[0,1]} f_{AB}(y) = 3 \text{ tại } y=1, \text{ và } \min_{y\in[0,1]} f_{AB}(y) = 0 \text{ tại } y=0.$$	0.5
	Trên biên $OB: y=x, 0\le x\le 1.$ Ta có $$f_{OB}(x) = f(x,y) = 3x^2,\ 0\le x\le 1.$$ Suy ra $$\max_{x\in[0,1]} f_{OB}(x) = 3 \text{ tại } x=1, \text{ và } \min_{x\in[0,1]} f_{OB}(x) = 0 \text{ tại } x=0.$$	0.5
	Vì vậy $\max_D f(x,y) = 3$ tại $(x,y)=(1,1)$, và $\min_D f(x,y)=0$ tại $(x,y)=(0,0).$	0.5
Câu 2	a) Gọi *S* là diện tích cần tìm. Khi đó ta có $$S = \iint_D dA,$$ với D là miền phẳng cần tìm diện tích. Đặt $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow J = r.$ Phương trình trong tọa độ cực $x^2+y^2=4 \Rightarrow r=2.$ $x^2+y^2=9 \Rightarrow r=3.$	0.5

	$y=0 \Rightarrow \theta=0;\ \ y=\sqrt{3}\,x \Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{3}.$ Ta có biểu diễn của miền D trong tọa độ cực $$D=\left\{(r,\theta): 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}, 2\le r\le 3\right\}.$$	
	Suy ra $$S=\iint_D dA=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^3 r\,dr\,d\theta=\frac{\pi}{3}\frac{r^2}{2}\Bigg\|_{r=2}^{r=3}=\frac{5\pi}{6}.$$	0.5
	b) Giao tuyến của hai mặt $x^2+y^2=2z$ và $z=2$ $$\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\ z=2\end{cases}.$$ Hình chiếu của miền E lên mặt phẳng Oxy là miền D giới hạn bởi $x^2+y^2=4.$ Đặt $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\Rightarrow J=r.\\ z=z\end{cases}$ Phương trình trong tọa độ trụ $x^2+y^2=2z\Rightarrow z=\dfrac{r^2}{2}.$ $x^2+y^2=4\Rightarrow r=2.$ Ta có biểu diễn của miền E trong tọa độ trụ $$E=\left\{(r,\theta,z): 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2, \frac{r^2}{2}\le z\le 2\right\}.$$	0.5
	Suy ra $$\iiint_E (x^2+y^2)\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr\,d\theta$$ $$=2\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg\|_{r=0}^{r=2}=\frac{16\pi}{3}.$$	0.5
	c) Ta có $$I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} x\,dz\,dy\,dx=\iiint_E x\,dV,$$ trong đó E là miền có biểu diễn $$E=\left\{(x,y,z): 0\le x\le 1, 0\le y\le\sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}.$$ Giao tuyến của $z=\sqrt{x^2+y^2}$ và $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ là đường tròn $$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{2-x^2-y^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1\end{cases}.$$ Hình chiếu của miền E lên mặt phẳng Oxy là miền D giới hạn bởi $$x^2+y^2=4, x\ge 0, y\ge 0.$$ Đặt $\begin{cases}x=\rho\sin\phi\cos\theta\\ y=\rho\sin\phi\sin\theta\Rightarrow J=\rho^2\sin\phi.\\ z=\rho\cos\phi\end{cases}$ Phương trình trong tọa độ cầu	

	$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4}.$ $z=\sqrt{2-x^2-y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} z\ge 0\\ x^2+y^2+z^2=2\end{cases} \Rightarrow \rho=\sqrt{2}.$ Ta có biểu diễn của miền E trong tọa độ cầu $$E=\left\{(\rho,\theta,\phi):0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\phi\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le\sqrt{2}\right\}.$$	
	Suy ra $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}\rho\sin\phi\cos\theta\cdot\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$$ $$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\phi d\phi.\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho$$ $$=\sin\theta\Big\|_0^{\frac{\pi}{2}}.\frac{1}{2}\left(\phi-\frac{\sin 2\phi}{2}\right)\Bigg\|_0^{\frac{\pi}{4}}.\frac{\rho^4}{4}\Bigg\|_0^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).$$	0.5
Câu 3	a) Đặt $P(x,y)=e^y$, $Q(x,y)=xe^y-2y$. Ta có $$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=e^y.$$ Suy ra phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần.	0.5
	Vì vậy tích phân tổng quát của phương trình là $$U(x,y)=C,$$ với C là hằng số và $U(x,y)=\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=\int_0^x e^y dx+\int_0^y -2ydy=xe^y-y^2.$	0.5
	b) Xét phương trình đặc trưng $\lambda^2-5\lambda+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=4\end{array}\right.$. Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất $y''-5y'+4y=0$ là $$y_1=c_1e^x+c_2e^{4x},\ c_1,c_2 \text{ là các hằng số.}$$	0.5
	Tìm nghiệm riêng của phương trình $y''-5y'+4y=e^{2x}$ dạng $y_2=ae^{2x}$. Thay vào phương trình ta tìm được $y_2=-\frac{e^{2x}}{2}$.	0.5
	Tìm nghiệm riêng của phương trình $y''-5y'+4y=\sin x$ dạng $y_3=a\cos x+b\sin x$. Thay vào phương trình ta tìm được $$y_3=\frac{5}{34}\cos x+\frac{3}{24}\sin x.$$	0.5
	Suy ra nghiệm riêng của phương trình $y''-5y'+4y=e^{2x}+\sin x$ là $$y_4=y_2+y_3=-\frac{e^{2x}}{2}+\frac{5}{34}\cos x+\frac{3}{24}\sin x.$$ Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $$y=y_1+y_4=c_1e^x+c_2e^{3x}-\frac{e^{2x}}{2}+\frac{5}{34}\cos x+\frac{3}{24}\sin x,\ c_1,c_2 \text{ là các hằng số.}$$	0.5
Câu 4	Gọi $A(t)$ là số người nghe được quảng cáo về thuốc tại thời điểm t trong số một triệu khách hàng với đơn vị là triệu người. Theo đề bài ta có $$\frac{d}{dt}A(t)=k(1-A(t)),\ 0\le A\le 1,$$ với k là hằng số tỉ lệ, t là thời biến thời gian và lưu ý rằng tại thời điểm	0.5

	ban đầu $A_0 = A(0) = 0$.	
	Giải bài toán ta tìm được nghiệm $$A(t) = (A_0 - 1)e^{-kt} + 1 = 1 - e^{-kt}.$$ Hơn nữa, ta có $A(1) = \frac{1}{2}$ suy ra $k = \ln 2$. Vì vậy, sau hai năm ta có $A(2) = 1 - e^{-2\ln 2} = \frac{3}{4}$ triệu khách hàng hay có 750.000 khách hàng nghe được quảng cáo về thuốc.	0.5