

Câu 1 (2.0 điểm). Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t & 3 \\ -2 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

trong đó m, t là các hằng số thực.

- Xác định m để ma trận A khả nghịch.
- Với $m = 1$, tìm ma trận nghịch đảo của A và ma trận X sao cho $AX - 3B^T = D$, trong đó B^T là ma trận chuyển vị của ma trận B .
 Được phép sử dụng máy tính cầm tay, nhưng phải trình bày biểu thức ma trận ở từng bước tính.

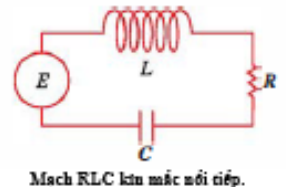
Câu 2 (3.0 điểm). Giải phương trình vi phân sau

- $y'' - 2y' + 2y = x + 1$.
- $x^2y' - 2xy = x^4e^x, x > 0$.

Câu 3 (2.0 điểm). Cường độ dòng điện trong một mạch RLC kín mắc nối tiếp (như hình vẽ) thỏa mãn phương trình vi tích phân sau:

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = E(t),$$

trong đó L là hệ số tự cảm của cuộn cảm, C là điện dung của tụ điện, R là điện trở, và $E(t)$ là suất điện động, $i(t)$ là cường độ dòng điện trong mạch.



Giả sử $L = 0,1; C = 0,1; R = 2; E(t) = 1 - \mathcal{U}(t - 3)$ với \mathcal{U} là hàm bậc thang đơn vị được định nghĩa như sau

$$\mathcal{U}(t - 3) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq t < 3 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 3 \end{cases}.$$

Tìm cường độ dòng điện $i(t)$ trong mạch biết rằng $i(0) = 0$.

Cho biết các biến đổi Laplace $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ và $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$

Câu 4 (2.0 điểm). Nếu một loài cá được thu hoạch hàng tháng với số lượng h (đơn vị tấn) ở một khu vực nào đó, thì số lượng cá $P(t)$ của quần thể cá đó tại thời điểm t được mô hình bởi phương trình vi phân sau

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, P(0) = P_0$$

trong đó a, b và P_0 là các hằng số dương, với P_0 là số lượng cá hiện tại. Giả sử $a = 10, b = 1$ và $h = 0,2P$ (tức là, lượng thu hoạch bằng 20% lượng cá hiện có), $P_0 = 5$.

- Giải phương trình vi phân trên tìm số lượng cá tại thời điểm t .

- b. Xác định khoảng thời gian (tính từ thời điểm hiện tại) để số lượng cá bằng $3/2$ số lượng cá ban đầu.
- c. Tính $\lim_{t \rightarrow \infty} P$, từ đó ước lượng số lượng cá trong khu vực khi thời gian đủ lớn.
- d. Tính số lượng cá sau 5 tháng.

Câu 5 (1.0 điểm). Cho bài toán giá trị ban đầu

$$y' = 2xy - \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

Tính gần đúng giá trị của nghiệm $y(2)$ với độ chính xác đến 4 chữ số thập phân bằng phương pháp Euler với bước chia $h = 0.5$.

Anh/Chị hãy trình bày kết quả như sau:

Công thức vòng lặp $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = \dots$
Bảng giá trị của từng bước lặp

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[LO 1. 1]: Áp dụng được các tính chất cơ bản của ma trận và định thức, giải được hệ phương trình tuyến tính	Câu 1
[LO 1.2]: Giải được phương trình vi phân	Câu 2, 4, 5
[LO 1.3, 2.3]: Áp dụng được phép biến đổi Laplace	Câu 3

Ngày 4 tháng 12 năm 2024
Thông qua Trưởng bộ môn