TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn: TOÁN KINH TẾ 1
Mã môn học: MATH132701
Đề số/Mã đề: 1   Đề thi có 2 trang.
Thời gian: 90 phút.
Ngày thi: 27/12/2024
Sinh viên được sử dụng 1 tờ tài liệu viết tay khổ A4.

Câu 1: (1,5 điểm) Cho hàm cầu tuyến tính $Q = a - bp\ (a,\ b > 0)$, trong đó p là giá bán của sản phẩm.

a) Tính $\eta(p)$ là độ co giãn của cầu theo giá và tìm mức giá bán p để $\eta(p) = -1$.

b) Tìm mức giá bán p để doanh thu của sản phẩm lớn nhất.

Câu 2: (1 điểm) Viết công thức khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$ tại điểm $x_o = 1$ đến bậc 3 và áp dụng để tính gần đúng giá trị $f(1.12)$ (lấy kết quả đến 5 chữ số thập phân).

Câu 3: (2,5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm giá trị của tham số *m* để ma trận *A* khả nghịch. Khi *A* khả nghịch, tìm ma trận *X* thỏa mãn $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ (Ký hiệu B^T là ma trận chuyển vị của ma trận *B*).

b) Với $m = 1$, chéo hóa trực giao ma trận *A*. Tính A^{2024} và $\det\left[A^{2024}\right]$.

Câu 4: (1,5 điểm) Xét thị trường có ba loại sản phẩm với các hàm cung và hàm cầu như sau:

Sản phẩm 1: $Q_{S_1} = 4P_1 - P_2 - P_3 - 2$, $Q_{D_1} = 10 - 2P_1 + P_2 + P_3$.

Sản phẩm 2: $Q_{S_2} = P_1 + 4P_2 - P_3 - 1$, $Q_{D_2} = 1 + P_1 - 2P_2 + P_3$.

Sản phẩm 3: $Q_{S_3} = -P_1 + P_2 + 4P_3 - 2$, $Q_{D_3} = 3 + P_1 + 2P_2 - 2P_3$.

Áp dụng phương pháp định thức Cramer, tìm bộ giá và bộ sản lượng cân bằng thị trường của ba loại sản phẩm trên.

Câu 5: (1,5 điểm) Cho hàm sản xuất $Q = 0,4K^{0,5}L^{0,9}$ (đơn vị tính là 1000 tấn), trong đó *K* là lượng vốn (đơn vị tính là tỷ đồng), *L* là lượng lao động (đơn vị tính là 10 người).

a) Tính sản lượng biên tế theo vốn và sản lượng biên tế theo lao động tại mức $K = 12,\ L = 8$. Công ty nên tăng vốn hay tăng lao động để sản lượng tăng nhanh hơn?

b) Giả sử tại mức $K = 12,\ L = 8$, vốn tăng 350 triệu đồng/năm, lượng lao động giảm 2 người/năm. Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, hãy ước tính tốc độ thay đổi của sản lượng.

Câu 6: (1 điểm) Một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường khác nhau với đơn giá cho mỗi sản phẩm tại từng thị trường lần lượt là $P_1 = 720,\ P_2 = 550$ (USD). Giả sử tổng chi phí sản xuất của công ty là

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20Q_1 + 50Q_2 + 300 \text{ (USD)}.$$

Trong đó Q_1, Q_2 lần lượt là số lượng sản phẩm tiêu thụ ở từng thị trường. Hỏi công ty đó cần tiêu thụ bao nhiêu sản phẩm ở mỗi thị trường để tối ưu hóa lợi nhuận?

Câu 7: (1 điểm) Giả sử một người tiêu dùng có hàm lợi ích là $U = 0,5x(y+2)$, trong đó *x* và *y* lần lượt là số lượng của mỗi loại hàng hóa *X* và *Y* được mua. Biết đơn giá của hàng hóa *X* là 120 (ngàn đồng) và đơn giá của hàng hóa *Y* là 60 (ngàn đồng). Giả sử người tiêu dùng muốn thụ hưởng mức lợi ích cố định là $U_0 = 144$, hãy tìm số lượng hàng hóa mỗi loại mà người tiêu dùng cần mua để chi phí tiêu dùng nhỏ nhất.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G2.1]: Tính được đạo hàm của hàm một biến. Khai triển Taylor, Maclaurin, tính gần đúng. Tính được đạo hàm riêng của hàm nhiều biến.	Câu 1, Câu 2, Câu 5
[CĐR G2.2]: Tìm được cực trị của hàm một biến và hàm nhiều biến. Áp dụng được phép tính vi phân hàm một biến và hàm nhiều biến vào kinh tế.	Câu 1, Câu 6, Câu 7
[CĐR G2.3]: Thực hiện các phép toán ma trận, tính định thức, tìm hạng, tính ma trận nghịch đảo. [CĐR G2.7]: Tìm được trị riêng và vectơ riêng của ma trận, xác định được hạng và dấu của dạng toàn phương.	Câu 3
[CĐR G2.5]:Ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính vào các mô hình cân bằng thị trường, cân bằng kinh tế vĩ mô.	Câu 4

Ngày 17 tháng 12 năm 2024

Thông qua bộ môn

ĐÁP ÁN TOÁN KINH TẾ 1 HỌC KỲ 1 2024-2025

Câu 1 **1,5đ**	Cho hàm cầu tuyến tính $Q = a - bp \ (a,\ b > 0)$, trong đó p là giá bán của sản phẩm. **a)** Tính $\eta(p)$ là độ co giãn của cầu theo giá và tìm mức giá bán p để $\eta(p) = -1$. **b)** Tìm mức giá bán p để doanh thu của sản phẩm lớn nhất.	
a **(0,5đ)**	$\eta(p) = Q'(p)\dfrac{p}{Q} = \dfrac{bp}{bp-a}$ $\eta(p) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{bp}{bp-a} = -1 \Leftrightarrow p = \dfrac{a}{2b}$.	0,25đ 0,25đ
b **(1đ)**	Hàm doanh thu: $R = p.Q = p(a-bp) = ap - bp^2$ $R'(p) = a - 2bp;\ R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = \dfrac{a}{2b}$. $R''(p) = -2b < 0\ \forall p$ Vậy doanh thu lớn nhất khi $p = \dfrac{a}{2b}$.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 2 1đ	Viết công thức khai triển Taylor của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$ tại điểm $x_o = 1$ đến bậc 3 và áp dụng để tính gần đúng giá trị $f(1.12)$ (lấy kết quả đến 5 chữ số thập phân).	
	$f(1) = 2$ $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x+7)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{1}{12}$ $f''(x) = -\dfrac{2}{9}(x+7)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(1) = -\dfrac{1}{144}$ $f'''(x) = \dfrac{10}{27}(x+7)^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow f'''(1) = \dfrac{5}{3456}$ $f(x) \approx f(1) + \dfrac{f'(1)(x-1)}{1!} + \dfrac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \dfrac{f'''(1)(x-1)^3}{3!}$ $\approx 2 + \dfrac{1}{12}(x-1) - \dfrac{1}{288}(x-1)^2 + \dfrac{5}{20736}(x-1)^3 + ...$ $f(1.12) \approx 2.00995$	0,5đ 0,25đ 0,25đ
Câu 3 2,5đ	Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{bmatrix}$. a) Tìm giá trị của tham số *m* để ma trận *A* khả nghịch. Khi *A* khả nghịch, tìm ma trận *X* thỏa mãn $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$	

	b) Với $m=1$, chéo hóa ma trận A và tính A^{2024}.	
a 1đ	A khả nghịch $\Leftrightarrow \det[A]\neq 0 \Leftrightarrow 4-m^2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 2$ $X=A^{-1}.\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{4-m^2}\begin{bmatrix}2 & -m\\-m & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2-m}\\\dfrac{1}{m-2}\end{bmatrix}$	0,5đ 0,5đ
b 1,5đ	$m=1\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$ $\det\left(A-\lambda I\right)=0\Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0\Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3$ $\lambda_1=1:\left(A-1.I\right)X=0\rightarrow X_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ $\lambda_1=3:\left(A-3.I\right)X=0\rightarrow X_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $X_1'=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}, X_2'=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ $C=\left[X_1'\ \ X_2'\right]=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix};\ C^{-1}AC=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ $A^{2024}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^{2024} & 0\\0 & 3^{2024}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1+3^{2024}}{2} & \dfrac{-1+3^{2024}}{2}\\\dfrac{-1+3^{2024}}{2} & \dfrac{1+3^{2024}}{2}\end{bmatrix}$ $\det[A^{2024}]=3^{2024}$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 4 **1,5đ**	Xét thị trường có ba loại sản phẩm với các hàm cung và hàm cầu như sau: Sản phẩm 1: $Q_{S_1}=4P_1-P_2-P_3-2$, $Q_{D_1}=10-2P_1+P_2+P_3$. Sản phẩm 2: $Q_{S_2}=P_1+4P_2-P_3-1$, $Q_{D_2}=1+P_1-2P_2+P_3$. Sản phẩm 3: $Q_{S_3}=-P_1+P_2+4P_3-2$, $Q_{D_3}=3+P_1+2P_2-2P_3$. Áp dụng phương pháp định thức Cramer, tìm bộ giá và bộ sản lượng cân bằng thị trường của ba loại sản phẩm trên.	
	Thị trường cân bằng $\Leftrightarrow \begin{cases}Q_{s_1}=Q_{d_1}\\Q_{s_2}=Q_{d_2}\\Q_{s_3}=Q_{d_3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}6P_1 & -2P_2 & -2P_3 & = & 12\\ & 6P_2 & -2P_3 & = & 2\\-2P_1 & -P_2 & +6P_3 & = & 5\end{cases}$	0,5đ

	$D=\det\begin{bmatrix}6 & -2 & -2\\ 0 & 6 & -2\\ -2 & -1 & 6\end{bmatrix}=172$ $D_1=\det\begin{bmatrix}12 & -2 & -2\\ 2 & 6 & -2\\ 5 & -1 & 6\end{bmatrix}=516$ $D_2=\det\begin{bmatrix}6 & 12 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & 5 & 6\end{bmatrix}=172$ $D_3=\det\begin{bmatrix}6 & -2 & 12\\ 0 & 6 & 2\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}=344$	0,5đ
	$\Rightarrow\begin{cases}P_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{516}{172}=3\\ P_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{172}{172}=1\\ P_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{344}{172}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q_1=7\\ Q_2=4\\ Q_3=4\end{cases}$	0,5đ
Câu 5 **1,5đ**	Cho hàm sản xuất $Q=0,4K^{0,5}L^{0,9}$ (đơn vị tính là 1000 tấn) , trong đó K là lượng vốn (đơn vị tính là tỷ đồng), L là lượng lao động (đơn vị tính là 10 người). **a**) Tính sản lượng biên tế theo vốn và sản lượng biên tế theo lao động tại mức $K=12,\ L=8$. Công ty nên tăng vốn hay tăng lao động để sản lượng tăng nhanh hơn? **b**) Giả sử tại mức $K=12,\ L=8$, vốn tăng 350 triệu đồng/năm, lượng lao động giảm 2 người/năm. Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, hãy ước tính tốc độ thay đổi của sản lượng	1,5đ
a 1đ	$MQ_K=Q_K=0,2K^{-0,5}L^{0,9},\ MQ_L=Q_L=0,36K^{0,5}L^{-0,1}$ Tại K = 12, L = 8 thì $MQ_K=0,3752;\ MQ_L=1,0129$ Vì $MQ_K<MQ_L$ nên công ty cần tăng lao động để sản lượng tăng nhanh hơn.	0,5đ 0,25đ 0,25đ
b 0,5đ	$\dfrac{dQ}{dt}=Q_K\dfrac{dK}{dt}+Q_L\dfrac{dL}{dt}$ $=0,3752\times 0,35+1,0129\times(-0,2)=-0,0713.$ (ngàn tấn/năm) Vậy sản lượng giảm với tốc độ 71,3 tấn/năm.	0,25đ 0,25đ
Câu 6 **1đ**	Một công ty sản xuất độc quyền một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường khác nhau với đơn giá cho mỗi sản phẩm tại từng thị trường lần lượt là $P_1=720,\ P_2=550$ (USD). Giả sử tổng chi phí sản xuất của công ty là $C(Q_1,Q_2)=Q_1^2+Q_1Q_2+Q_2^2+20Q_1+50Q_2+300$ (USD). Trong đó $Q_1,\ Q_2$ lần lượt là số lượng sản phẩm tiêu thụ ở từng thị trường. Hỏi công	

	ty đó cần tiêu thụ bao nhiêu sản phẩm ở mỗi thị trường để tối ưu hóa lợi nhuận?	
	Hàm lợi nhuận là: $\pi(Q_1,Q_2) = R(Q_1,Q_2) - C(Q_1,Q_2)$ $= 720Q_1 + 550Q_2 - (Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 20Q_1 + 50Q_2 + 300)$ $= 700Q_1 + 500Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 - 300$ Điều kiện bậc 1: $\begin{cases}\pi_{Q_1} = 0 \\ \pi_{Q_2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}700 - 2Q_1 - Q_2 = 0 \\ 500 - Q_1 - 2Q_2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Q_1 = 300 \\ Q_2 = 100\end{cases}$ Điều kiện bậc 2: Ma trận Hesse: $H(Q_1,Q_2) = \begin{bmatrix}\pi_{Q_1Q_1} & \pi_{Q_1Q_2} \\ \pi_{Q_2Q_1} & \pi_{Q_2Q_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1 \\ -1 & -2\end{bmatrix}$ có $A = -2 < 0,\ \Delta = \det H = 3 > 0$ nên xác định âm $\forall Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0.$ Do đó lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất khi $Q_1 = 300$, $Q_2 = 100$.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
Câu 7 1đ	Giả sử một người tiêu dùng có hàm lợi ích là $U = 0,5x(y+2)$, trong đó x và y lần lượt là số lượng của mỗi loại hàng hóa X và Y được mua. Biết đơn giá của hàng hóa X là 120 (ngàn đồng) và đơn giá của hàng hóa Y là 60 (ngàn đồng). Giả sử người tiêu dùng muốn thụ hưởng mức lợi ích cố định là $U_0 = 144$, hãy tìm số lượng hàng hóa mỗi loại mà người tiêu dùng cần mua để chi phí tiêu dùng nhỏ nhất.	
	Hàm chi phí tiêu dùng là: $C(x,y) = 120x + 60y$ Từ $U = 0,5x(y+2) = 144$, ta suy ra $x = \frac{288}{y+2}$ Do đó $C = C(y) = \frac{120 \times 288}{y+2} + 60y\ \ (y > 0).$ $C'(y) = \frac{-120 \times 288}{(y+2)^2} + 60$ $C'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 22 \\ y = -26\ \ (loai) \end{array}\right.$ $C''(y) = \frac{240 \times 288}{(y+2)^3} > 0\ \ \forall y > 0.$ Vậy chi phí tiêu dùng đạt giá trị nhỏ nhất khi $y = 22$, $x = 12$.	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ