

Đề thi

Câu I. (2.5 điểm)

- (a) Trong vành \mathbb{Z}_{26} , cho ma trận $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Hãy dùng mật mã Hill với khoá K để mã hoá đoạn tin nhắn: “MATH” và giải mã đoạn tin nhắn: “XXYV”. Biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái tiếng Anh được đặt tương ứng với mỗi phần tử trong \mathbb{Z}_{26} như trong bảng sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- (b) Cho n là số nguyên lớn hơn 1, ký hiệu $M(n, \mathbb{Q})$ là tập tất cả các ma trận vuông cấp n với hệ số hữu tỷ. Chứng minh rằng, $M(n, \mathbb{Q})$ cùng với hai phép toán cộng và nhân hai ma trận là một vành không giao hoán.

Câu II. (3.0 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1[x]$ xác định bởi: với mọi $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,
 $f(u) = (a + 3b) + (2a - b)x$.

- (a) Tìm số khuyết của ánh xạ tuyến tính f .
- (b) Xác định ảnh và tìm hạng của ánh xạ tuyến tính f .
- (c) Chứng minh rằng, $\mathcal{F} = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ là một tập sinh của \mathbb{R}^2 .
- (d) Đặt $v_k = \begin{bmatrix} k \\ k + 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, với $1 \leq k \leq 2024$. Hỏi tập $\mathcal{S} = \{v_k : 1 \leq k \leq 2024\}$ có là một tập sinh của \mathbb{R}^2 không? Vì sao?

Câu III. (3.5 điểm) Cho dạng toàn phương $Q(X) = X^T A X = 5x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2$, với $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Ký hiệu $\text{Col } A$ là không gian sinh bởi tất cả các vectơ cột của ma trận A . Tìm một cơ sở và số chiều của $\text{Col } A$.
- (b) Đưa dạng toàn phương $Q(X)$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hoá trực giao.
- (c) Sử dụng kết quả câu (b), hãy chéo hoá trực giao ma trận A^{2024} .

Câu IV. (1.0 điểm) Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất gồm 7 phương trình, 7 ẩn số x_1, \dots, x_7 như sau

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 - \dots - x_7 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 - \dots - x_7 = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ -x_1 - x_2 - \dots + 6x_7 = 0. \end{cases}$$

Gọi N là ma trận hệ số của hệ phương trình trên. Tính định thức của ma trận N .

————— HẾT —————

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm về đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CDR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, ...) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính.	Câu I, Câu IV
[CDR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian vectơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp GramSchmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,...	Câu II, Câu III
[CDR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toan phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, vectơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toan phương; đưa dạng toan phương về dạng chính tắc.	Câu II, Câu III
[CDR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, ...	Câu I

TP. HCM, ngày 15 tháng 12 năm 2024
Trưởng bộ môn Toán

Phạm Văn Hiến