

ĐÁP ÁN ĐỀ TOÁN 1 CUỐI HỌC KỲ I- NĂM HỌC 2023-2024
13g00- Ngày 29/12/2023

Câu	Nội dung	Điểm
1a	$C(25) = \frac{75(25)}{85 - 25} = \frac{125}{4} \quad (\text{nghìn đô})$	0.5
1b	$C = \frac{75p}{85 - p} \Rightarrow p = \frac{85C}{75 + C}$	0.5
	Khi $C = 50$ (nghìn đô) thì $p = \frac{85(50)}{75 + 50} = 34 \quad (\text{ppb})$	0.5
2a	Vì f là hàm sơ cấp khi $x \neq 0$ nên f liên tục. Do đó, $f(x)$ liên tục với mọi x khi f liên tục tại $x = 0$	0.25
	$f(0) = 0; \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{x}$ <ul style="list-style-type: none"> Nếu $a < 0$ thì $L = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } x > 0 \\ -\infty & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f$ không liên tục tại 0. Nếu $a = 0$ thì $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x }{x}$, giới hạn không tồn tại vì: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ nên f không liên tục tại 0. 	0.25 0.25
	Nếu $a > 0$ thì $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 0 = f(0)$ Suy ra f liên tục tại 0. Vậy với $a > 0$ thì f liên tục tại mọi điểm.	0.5 0.25
2b	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x\sqrt{x^2 + 1}}$	0.5

	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2}$ <p>Hàm số khả vi tại $x = 0$.</p>	0.5
3	Đạo hàm hai vế của phương trình theo x , ta được: $y^2 + 2xyy' + \cos x = -y'$	0.25
	$y'(x) = \frac{-y^2 - \cos x}{2xy + 1} \Rightarrow y'(\pi/2) = 0$	0.5
	Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại $P(\pi/2; 0)$ là: $y - 0 = 0(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow y = 0$	0.25
4	$T_{avg} = \frac{1}{3} \int_0^3 \left(50 + 14 \sin \frac{\pi t}{9} \right) dt = \frac{1}{3} \left(50t - \frac{126}{\pi} \cos \frac{\pi t}{9} \right) \Big _0^3$	0.5
	$= 50 + \frac{21}{\pi} \approx 56.68450761 \quad (^\circ\text{F})$	0.5
5	Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $\begin{cases} V = \pi r^2 h = 30 \Rightarrow h = \frac{30}{\pi r^2} \\ S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{cases} \Rightarrow S = 2\pi r^2 + \frac{60}{r} \quad \text{với } r > 0$	0.5
	$S'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{60}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$	0.5

	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">r</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$S'(r)$</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$S(r)$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$6\sqrt[3]{225\pi}$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">$S_{min} = 6\sqrt[3]{225\pi}$ khi $r = \sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$ và $h = 2\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$</p>	r	0	$\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$	$+\infty$	$S'(r)$	-	0	+	$S(r)$	$+\infty$	$6\sqrt[3]{225\pi}$	$+\infty$	0.5
r	0	$\sqrt[3]{\frac{15}{\pi}}$	$+\infty$											
$S'(r)$	-	0	+											
$S(r)$	$+\infty$	$6\sqrt[3]{225\pi}$	$+\infty$											
6	$\int_{2023}^{2024} f(x)dx = F(x) \Big _{2023}^{2024} = f(x) \Big _{2023}^{2024} = f(2024) - f(2023)$	0.5												
	<p>Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx = f(x)dx$. Khi đó</p> $\int_{2023}^{2024} f^2(x)dx = \int_{f(2023)}^{f(2024)} u du = \frac{1}{2}u^2 \Big _{f(2023)}^{f(2024)} = \frac{1}{2}[f^2(2024) - f^2(2023)]$	0.25 0.25												
7	<p>Diện tích lỗ thủng $A_0 = \frac{1}{16}$ (ft²)</p> $\frac{dV}{dt} = -4.8 \left(\frac{1}{16} \right) \sqrt{h} = -\frac{3}{10} \sqrt{h}$	0.25												
	<p>Thể tích nước ở thời điểm t là</p> $V(t) = 9h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 9 \frac{dh}{dt}$	0.25												
	<p>Vậy</p> $9 \frac{dh}{dt} = -\frac{3}{10} \sqrt{h} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{30} \sqrt{h}$	0.25												
	$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{1}{30} \int dt \Rightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{t}{30} + C$	0.25												
	$h(0) = 4 \Rightarrow 4 = 0 + C \Rightarrow C = 4$	0.25												
	<p>Vậy $2\sqrt{h} = -\frac{t}{30} + 4$</p>													

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{t}{30} + 4 \Rightarrow t = 120 (s)$$

0.25