

Câu 1: (1.5 điểm).

Giá thành (nguyên đô la) để loại bỏ các chất ô nhiễm ở một hồ nước được mô hình bởi hàm số $C(p) = 75p/(85 - p)$, trong đó p là lượng chất ô nhiễm trong hồ (đơn vị ppb-một phần tỷ). Mô hình này chỉ được sử dụng khi lượng chất ô nhiễm nhỏ hơn 85 ppb.

- a) Hãy tìm giá thành để loại bỏ lượng chất ô nhiễm 25 ppb trong hồ.
- b) Hãy tìm hàm số ngược của hàm $C(p)$. Từ đó xác định lượng chất độc có trong hồ nếu biết chi phí bỏ ra để loại bỏ chất ô nhiễm là 50,000 đô la.

Câu 2: (2.5 điểm). Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

- a) Tìm a để hàm số f liên tục với mọi x .
- b) Với $a = 1$, xét tính khả vi của f tại $x = 0$ và tính $f'(0)$ nếu tồn tại.

Câu 3: (1.0 điểm).

Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong cho bởi phương trình $xy^2 + \sin x = 1 - y$ tại điểm $P\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Câu 4: (1.0 điểm).

Giả sử nhiệt độ ($^{\circ}F$) tại một thành phố được mô hình bởi hàm số

$$T(t) = 50 + 14 \sin \frac{\pi t}{9}, \quad (1)$$

với t là số giờ kể từ lúc 9 giờ sáng. Hãy tính nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian từ 9 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Câu 5: (1.5 điểm).

Người ta cần thiết kế một viên kẹo hình trụ đứng có đáy là hình tròn và có thể tích 30 cm^3 . Tìm bán kính đáy r và chiều cao h của viên kẹo có diện tích bề mặt nhỏ nhất có thể thiết kế.

Câu 6: (1.0 điểm).

Giả sử f là một hàm số khả vi trên $(-\infty, \infty)$ thỏa $f'(x) = f(x)$ với mọi x . Chứng minh rằng

a) $\int_{2023}^{2024} f(x) dx = f(2004) - f(2023)$.

b) $\int_{2023}^{2024} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} (f^2(2024) - f^2(2023)).$

Câu 7: (1.5 điểm).

Một bể nước hình hộp chữ nhật có chiều cao là 4 ft và đáy có diện tích 9 ft². Ban đầu bể chứa đầy nước. Người ta cho nước thoát ra qua một lỗ hình vuông, cạnh bằng $\frac{1}{4}$ ft nằm ở đáy.

- a) Theo Định luật Torricelli, tốc độ thay đổi của thể tích nước tỉ lệ với diện tích A_0 của lỗ hình vuông và chiều cao mực nước trong bể h được cho bởi $dV/dt = -4,8A_0\sqrt{h}$. Hãy chứng tỏ rằng mực nước trong bể h thỏa phương trình vi phân

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{30}\sqrt{h}.$$

- b) Hỏi sau bao nhiêu giây thì nước trong bể được xả hết.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G1.1] Giải thích được các khái niệm về hàm số, hàm ngược, hàm siêu việt, giới hạn, liên tục, đạo hàm, vi phân và tích phân	Câu 1,2,3,4,5,6,7
[CĐR G1.2] Tính được các giới hạn, đạo hàm, vi phân của một hàm số, tính tích phân cơ bản, vẽ được đồ thị của hàm số	Câu 2,3,5,6
[CĐR G2.1] Xây dựng được mô hình toán học sử dụng đạo hàm để giải quyết các yêu cầu về tốc độ thay đổi và tối ưu trong đời sống, vật lý và kỹ thuật	Câu 5
[CĐR G2.3] Giải phương trình vi phân tách biến	Câu 7

Ngày 10 tháng 12 năm 2023

Thông qua bộ môn


Trương Vĩnh An