ĐÁP ÁN ĐSTT-CTĐS (Đại trà)

Mã môn học: MATH143001

Ngày thi: 28/12/2023

Câu	Ý	Đáp án (tóm tắt)	Điểm
I	a	Với mọi $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, ta có $\det(A) = 1 = \det(B)$. Vì $A.B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ và $\det(AB) = \det(A).\det(B) = 1$ nên $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Vậy phép nhân hai ma trận trên $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ là một phép toán hai ngôi trên $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$	0.5
		Với mọi $A, B, C \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, ta có $(AB)C = A(BC)$. Phần tử trung hoà: $I_n \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.	0.5
		Với mọi $X \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, ta có $\det X = 1$, tồn tại $X^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Hơn nữa, $\det(X.X^{-1}) = \det I_n = 1 = \det X.\det X^{-1}$, suy ra $\det X^{-1} = 1$. Do đó $X^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Vậy $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ cùng với phép toán này tạo thành một nhóm.	0.5
	b	Số hoá "MA" và "TH" ta được $\begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix}19\\7\end{bmatrix}$ $K\begin{bmatrix}12\\0\end{bmatrix}(mod26) = \begin{bmatrix}24\\8\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}Y\\I\end{bmatrix}$	0.5
		$K\begin{bmatrix}19\\7\end{bmatrix}(mod26) = \begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}H\\C\end{bmatrix}$ Vậy tin nhắn sau khi mã hoá là "YIHC".	0.5
II	a	Im f $= \{f(u) \in \mathbb{R}^3\ /u = (a\ b\ c)^T \in \mathbb{R}^3\}$ $= \{(a + 2b + c; 3a - b - 3c; 5a + 3b - c)^T\ /a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $= \{a(1; 3; 5)^T + b(2; -1; 3)^T + c(1; -3; -1)^T\ /a, b, c \in \mathbb{R}\}$ $= \mathrm{Span}\{v_1; v_2; v_3\}$.	0.5
		dim Imf $= 2$ và $\{w_1 = (1; 3; 5)^T; w_2 = (0; 1; 1)^T\}$ là một cơ sở của Im f.	0.5
	b	Ta có $\dim\mathbb{R}^3 = 3 = \|F\|$.	0.5
		Hơn nữa, F là tập ĐLTT trong $\mathbb{R}^3$ (giải thích). Từ đó suy ra, F là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.	0.5
		Giả sử $u = (a; b; c)^T \in \mathbb{R}^3$ sao cho $[f(u)]_F = [3; 5; 1]^T$ $\iff f(u) = 3u_1 + 5u_2 + u_3 \iff (a + 2b + c; 3a - b - 3c; 5a + 3b - c)^T = (16; 20; -15)^T$. Hệ này vô nghiêm. Vậy không tồn tại véc tơ $u \in \mathbb{R}^3$ thoả mãn yêu cầu bài toán.	0.5
	c	Để ba mặt phẳng trên có một điểm chung duy nhất thì hệ phương trình $\begin{cases}(a+1)x + 3y + az = 3a\\ 2x - ay + (3a+2)z = 7\\ ax + (a-3)y + 7z = 5\end{cases}$ phải có duy nhất nghiệm	0.5
		$\iff \det U = (a + 2)(a - 3)^2 \neq 0 \iff a \neq 2$ và $a \neq 3$.	0.5
III	a	$\mathbf{Nul}A = \{X \in \mathbb{R}^3\ /AX = 0\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$	0.5
	b	Giải phương trình đặc trưng $\|A - \lambda I_3\| = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$ tìm được 3 giá trị riêng $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$.	0.5
		Với $\lambda = 3$, $V_{\lambda=3} = \{a.(0; 0; 1)^T\ /a \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=3}$ là $X_1 = (0; 0; 1)^T$	0.5
		Với $\lambda = 2$, $V_{\lambda=2} = \{b.(-1; 1; 0)^T\ /b \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=2}$ là $X_2 = (-1; 1; 0)^T$	0.5
		Với $\lambda = 6$, $V_{\lambda=6} = \{c.(1; 1; 0)^T\ /c \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=6}$ là $X_3 = (1; 1; 0)^T$	0.5
		Đặt $Y_1 = \frac{X_1}{\|\|X_1\|\|} = (0; 0; 1)^T$, $Y_2 = \frac{X_2}{\|\|X_2\|\|} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0)^T$, $Y_3 = \frac{X_3}{\|\|X_3\|\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0)^T$ và $P = (Y_1 Y_2 Y_3)$ là một ma trận trực giao.	

		Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = P^TAP$. Tức là, A được chéo hoá trực giao bởi P	0.5
	c	Theo câu (b) ta có $P^{-1}AP = D$, suy ra $D^{2023} = P^{-1}A^{2023}P = \begin{bmatrix} 3^{2023} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2023} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{2023} \end{bmatrix} = P^TA^{2023}P$. Chứng tỏ A^{2023} được chéo hoá trực giao bởi ma trận trực giao P, có ma trận đường chéo là D^{2023}. Do đó, phép biến đổi trực giao $X = PY$ đưa $Q(X)$ về dạng chính tắc $Q_{CT}(Y) = 3^{2023}y_1^2 + 2^{2023}y_2^2 + 6^{2023}y_3^2$.	0.5
		Ta có $\det(B) = \det(2023A^{2023}) = 2023^3.\det(A^{2023}) = 2023^3.(\det A)^{2023} = 2023^3.36^{2023}$.	0.5