ĐÁP ÁN ĐSTT-CTĐS (CLC)

Mã môn học: MATH143001

Ngày thi: 28/12/2023

Câu	Ý	Đáp án (tóm tắt)	Điểm
I	a	$\mathbf{Nul}A = \{X \in \mathbb{R}^3\ /AX = 0\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$	0.5
	b	$Q(X) = X^T AX = 8x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2$. Giải phương trình $\lvert A - \lambda I_3 \rvert = (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$ tìm được 3 giá trị riêng $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 9$.	0.5
		Với $\lambda = 4$, $V_{\lambda=4} = \{a.(1;-2;0)^T\ /a \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=4}$ là $X_1 = (1;-2;0)^T$.	0.5
		Với $\lambda = 3$, $V_{\lambda=3} = \{b.(0;0;1)^T\ /b \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=3}$ là $X_2 = (0;0;1)^T$	0.5
		Với $\lambda = 9$, $V_{\lambda=9} = \{c.(2;1;0)^T\ /c \in \mathbb{R}\}$. Chọn vector riêng cơ sở của $V_{\lambda=9}$ là $X_3 = (2;1;0)^T$	0.5
		Đặt $Y_1 = \frac{X_1}{\lvert\lvert X_1\rvert\rvert} = (\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-2}{\sqrt{5}}; 0)^T$, $Y_2 = \frac{X_2}{\lvert\lvert X_2\rvert\rvert} = (0;0;1)^T$, $Y_3 = \frac{X_3}{\lvert\lvert X_3\rvert\rvert} = (\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; 0)^T$ và $P = (Y_1Y_2Y_3)$ là một ma trận trực giao. Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = P^TAP$. Tức là, A được chéo hoá trực giao bởi P. Phép đổi biến trực giao $X = PY$ đưa $Q(X)$ về dạng chính tắc $Q_{CT}(Y) = 4y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2$	0.5
	c	Theo câu (b) ta có $P^{-1}AP = D = P^TAP$, suy ra $D^{2023} = P^{-1}A^{2023}P = \begin{bmatrix} 4^{2023} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2023} & 0 \\ 0 & 0 & 9^{2023} \end{bmatrix} = P^TA^{2023}P$. Chứng tỏ A^{2023} được chéo hoá trực giao bởi ma trận trực giao P, có ma trận đường chéo là D^{2023}.	0.5
		Ta có $\det(B) = \det(3A^{2023}) = 3^3.\det(A^{2023}) = 3^3.(\det A)^{2023} = 3^3.108^{2023}$.	0.5
II	a	Kiểm tra $f(u+v) = f(u) + f(v)$ Kiểm tra $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, với mọi $u, v \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$.	0.5 0.5
	b	Ker f $= \{u = (a;b;c)^T \in \mathbb{R}^3\ /f(u) = 0_{\mathbb{P}_2[x]}\}$ $= \{(a;b;c)^T \in \mathbb{R}^3\ /a + 2b + 3c = 0;\ 2a + 3b - c = 0;\ 3a + 5b + 2c = 0\}$ $= \{(a;b;c)^T \in \mathbb{R}^3\ /a + 2b + 3c = 0;\ b + 7c = 0\} = \{(11c; -7c; c)^T\ /c \in \mathbb{R}\}$ $= \text{Span}\{v = (11;-7;1)^T\}$. Vì $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ nên $\{v\}$ là một cơ sở của Ker$f$ và dim Kerf $= 1$.	 0.5 0.5
	c	Dễ thấy $0_{\mathbb{P}_2[x]} \in W \subset \mathbb{P}_2[x]$. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W$, ta có $v(1) = v(-1) = 0, u(1) = u(-1) = 0$. Vì $(\alpha u)(1) = \alpha u(1) = 0 = \alpha u(-1) = (\alpha u)(-1)$ nên $\alpha u \in W$.	0.5
		Hơn nữa, vì $(u+v)(1) = u(1) + v(1) = 0 = u(-1) + v(-1) = (u+v)(-1)$ nên $u + v \in W$. Vậy $W \leqslant \mathbb{P}_2[x]$.	0.5
	d	Để ba mặt phẳng trên có một điểm chung duy nhất thì hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y + mz = 2m + 5 \\ mx - y + 5z = 1 - m \\ 3x + my + z = m^2 + 1 \end{cases}$ phải có duy nhất nghiệm	0.5
		$\Longleftrightarrow \det E = (m+4)(m^2 - 4m + 11) \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq -4$.	0.5
III	a	Với mọi $A, B \in \mathcal{U}$, ta có $\det(A) = 2023 = \det(B)$. Vì $\det(AB) = \det(A).\det(B) = 2023^2$ nên $AB \notin \mathcal{U}$. Vậy phép nhân hai ma trận trên $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ không là một phép toán hai ngôi trên $\mathcal{U}$	0.5

		Với mọi $A, B \in \mathcal{S}$, ta có $\det(A) = 1 = \det(B)$. Vì $A.B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ và $\det(AB) = \det(A).\det(B) = 1$ nên $AB \in \mathcal{S}$. Vậy phép nhân hai ma trận trên $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ là một phép toán hai ngôi trên $\mathcal{S}$. Với mọi $A, B, C \in \mathcal{S}$, ta có $(AB)C = A(BC)$. Phần tử trung hoà: $I_n \in \mathcal{S}$.	0.5
		Với mọi $X \in \mathcal{S}$, ta có $\det X = 1$, tồn tại $X^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Hơn nữa, $\det(X.X^{-1}) = \det I_n = 1 = \det X.\det X^{-1}$, suy ra $\det X^{-1} = 1$. Do đó $X^{-1} \in \mathcal{S}$. Vậy $\mathcal{S}$ cùng với phép nhân hai ma trận trên $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ tạo thành một nhóm.	0.5
	b	Số hoá "DO" và "NE" ta được $\begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$ $K \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \end{bmatrix}$ và $K \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} (mod 26) = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \end{bmatrix}$ Vậy tin nhắn sau khi mã hoá là "WLMX".	0.5