ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
Khoa Khoa học Ứng dụng
Bộ môn Toán

ĐỀ THI CUỐI KỲ I NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Đại số tuyến tính và Cấu trúc đại số
Mã môn học: MATH143001
Thời gian: 90 phút. Ngày thi: 28/12/2023 (ĐT)
Được phép sử dụng 01 tờ A4 chép tay

Đề thi

Câu I. (2.5 điểm)

(a) Ký hiệu $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ là tập tất cả các ma trận vuông cấp n với hệ số thực. Đặt

$$\text{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \ / \ \det(\text{M}) = 1\}.$$

Chứng minh rằng, phép nhân hai ma trận trên $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ là một phép toán hai ngôi trên $\text{S}_n(\mathbb{R})$, và $\text{S}_n(\mathbb{R})$ cùng với phép toán này tạo thành một nhóm.

(b) Trong vành $\mathbb{Z}_{26}$, cho ma trận $K = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. Hãy dùng mật mã Hill với khoá K để mã hoá đoạn tin nhắn sau đây: "MATH". Biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái tiếng anh được đặt tương ứng với mỗi phần tử trong $\mathbb{Z}_{26}$ như trong bảng sau:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Câu II. (3.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: với mọi $u = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = \begin{bmatrix} a+2b+c & 3a-b-3c & 5a+3b-c) \end{bmatrix}^T$.

(a) Tìm một cơ sở và số chiều của Imf.

(b) Chứng minh rằng, $F = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, u_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}^T, u_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$. Tìm véc tơ $u \in \mathbb{R}^3$ sao cho $[f(u)]_F = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(c) Trong không gian $\mathbb{R}^3$ được trang bị một hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc $(Oxyz)$, cho ba mặt phẳng có phương trình như sau:

$$(P_1) : (a+1)x+3y+az = 3a, (P_2) : 2x-ay+(3a+2)z = 7, (P_3) : ax+(a-3)y+7z = 5.$$

Tìm tham số a để ba mặt phẳng trên có một điểm chung duy nhất.

Câu III. (4.0 điểm) Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, với $x_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant 3$.

(a) Xác định **Nul**A.

(b) Hãy chéo hoá trực giao ma trận A.

(c) Sử dụng kết quả câu (b), hãy đưa dạng toàn phương $Q(X) = X^T A^{2023} X$ về dạng chính tắc bằng phương pháp chéo hoá trực giao. Tính định thức của ma trận $B = 2023.A^{2023}$.

——————HẾT——————

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	**Nội dung kiểm tra**
[CĐR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, ...) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính.	Câu II, Câu III
[CĐR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian véctơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp GramSchmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,...	Câu II, Câu III
[CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, véctơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương; đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.	Câu II, Câu IV
[CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, ...	Câu I

TP HCM ngày ....tháng.......năm........

DUYỆT ĐỀ THI