

Câu 1 (2.0 điểm). Cho ma trận A có phân tích LU là $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

a. Không tính A , hãy giải phương trình $Ax = b$ trong đó $b = [-1 \ -1 \ 2]^T$.

b. Tìm số chiều và một cơ sở của Row A , Col A .

Câu 2 (2.0 điểm). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ 3 & m+2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Với $m = -1$, tính định thức của các ma trận X và Y biết $AX = -2B$, $YB^T = 2A + B$.

b. Với điều kiện nào của m thì A khả nghịch? Tìm nghịch đảo của A trong trường hợp đó.

Câu 3 (1.0 điểm). Cho V là một không gian vectơ, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ và $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ là các cơ sở

của V sao cho ma trận đổi tọa độ từ B sang S là $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Hãy tìm tọa độ của vectơ

$v = 2s_2 + s_3$ theo cơ sở B .

Câu 4 (2.0 điểm). Trong \mathbb{R}^4 cho các vectơ $u = [2 \ -1 \ 1 \ 2]^T$, $v = [1 \ -1 \ -2 \ 2]^T$ và không gian con $W = \text{Span}\{u, v\}$.

a. Tìm một cơ sở trực giao của W .

b. Hãy phân tích vectơ $p = [1 \ -2 \ 1 \ 2]^T$ thành tổng của một vectơ thuộc W và một vectơ trực giao với W .

Câu 5 (2.0 điểm). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 8 & -5 \end{bmatrix}$ và các vectơ riêng của ma trận A là

$v_1 = [2 \ 1 \ 0]^T$, $v_2 = [1 \ 1 \ 1]^T$, $v_3 = [1 \ 2 \ 4]^T$.

a. Hãy tìm các giá trị riêng tương ứng với các vectơ riêng đã cho.

b. Tìm ma trận khả nghịch P và ma trận đường chéo D để $A = PDP^{-1}$.

Câu 6 (1.0 điểm). Trong \mathbb{Z}_{26} với hệ thống mật mã Hill cho khóa $K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Hãy mã hóa chữ INNOVATION, biết rằng mỗi ký tự trong bảng chữ cái được tương ứng một số trong \mathbb{Z}_{26} cho bởi bảng sau:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | | | | | | | | | | | | |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

| Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức) | Nội dung kiểm tra |
|--|----------------------------------|
| [CDR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính (giải bằng tay hay bằng cách sử dụng máy tính có cài đặt phần mềm ứng dụng phù hợp như matlab, maple, ...) và biết ứng dụng vào các mô hình tuyến tính. | Câu 1 Câu 2 Câu 3 Câu 6 |
| [CDR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian véctor, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một véctor có là tổ hợp tuyến tính của một hệ véctor; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ véctor; tìm cơ sở, số chiều của một không gian véctor; tìm tọa độ của một véctor đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp Gram-Schmidt để xây dựng hệ véctor trực giao từ một hệ véctor độc lập tuyến tính,... | Câu 1 Câu 3 Câu 4 |
| [CDR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính, chéo hóa ma trận, dạng toàn phương: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính; tìm trị riêng, véctor riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương; đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc. | Câu 5 |
| [CDR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai, ... | Câu 6 |

Ngày 01 tháng 01 năm 2021
Thông qua trưởng nhóm kiến thức

TS. Nguyễn Văn Toàn