Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng
Bộ môn Toán

ĐÁP ÁN KỲ THI HỌC KỲ I 2020-2021
MÔN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ CTĐS
Ngày thi: 13/01/2021

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="2">a</td><td>

$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \Leftrightarrow LU\mathbf{x}=\mathbf{b} \Leftrightarrow L(U\mathbf{x})=\mathbf{b}$. Đặt $\mathbf{y}=U\mathbf{x}$

Bước 1. Giải $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} L & \mathbf{b} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}. \text{ Vậy } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T.$$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>

Bước 2. Giải $U\mathbf{x}=\mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} U & \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nghiệm của thương trình $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ là:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + 3x_5 - 3 \\ 4x_5 + 1 \\ x_3 \\ 2x_5 + 2 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>

Theo phân tích đã cho thì A tương đương hàng với U, $A \sim U$. Do U có ba vị trí cơ sở nằm ở cột 1, cột 2 và cột 4, nên ta có một số kết luận như sau:

- $\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Row} A = 3.$
- Các véctơ thuộc hàng 1, hàng 2 và hàng 3 (chứa các vị trí cơ sở) của U lập thành một cơ sở của Row$A$, nghĩa là một cơ sở của Row$A$ là

$$\{(1,-2,1,2,1),(0,-1,0,1,2),(0,0,0,2,-4)\}$$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>

- Các cột cơ sở của A lập thành một cơ sở của Col$A$. Ta có

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

Do đó, một cơ sở của Col$A$ là

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

		$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-5\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}\right\}.$$	
2	a	Với $m=-1$, $A=\begin{bmatrix}-1&1\\3&1\end{bmatrix}, \det\left(A\right)=-4$. Ta cũng có $\det B=2$. Từ $AX=-2B$, lấy định thức cả hai vế: $$\det\left(AX\right)=\det\left(-2B\right)$$ $$\Rightarrow\left(\det A\right)\left(\det X\right)=\left(-2\right)^2\left(\det B\right)$$ $$\Rightarrow\det X=\frac{4\det B}{\det A}=\frac{4\times 2}{-4}=-2.$$	0.5
		Tương tự, từ $YB^T=2A+B$, lấy định thức cả hai vế ta có $$\det Y=\frac{\det\left(2A+B\right)}{\det B^T}=\frac{\det\left(2A+B\right)}{\det B}.$$ Do $\det\left(2A+B\right)=\det\left(\begin{bmatrix}3&0\\2&4\end{bmatrix}\right)=12$, nên $\det Y=\dfrac{12}{2}=6$.	0.5
	b	Trong trường hợp tổng quát, ta có $\det A=m^2+2m-3$. Ma trận *A* khả nghịch khi và chỉ khi $\det A\neq 0$, nghĩa là khi $m\neq 1$ và $m\neq -3$.	0.5
		Khi *A* khả nghịch (tức là khi $m\neq 1$ và $m\neq -3$), nghịch đảo của *A* là: $$A^{-1}=\frac{1}{m^2+2m-3}\begin{bmatrix}m+2&-1\\-3&m\end{bmatrix}.$$	0.5
3		Do ma trận đổi tọa độ từ cơ sở *B* sang cơ sở *S* là $T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&2\\1&1&5\end{bmatrix}$, nên ma trận đổi tọa độ từ *S* sang *B* là $T^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&2\\1&1&5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3/2&2&-1/2\\1/2&-1&1/2\end{bmatrix}$.	1.0
		Do $\mathbf{v}=2\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_3$ nên véctơ tọa độ của **v** theo cơ sở *S* là $\left[\mathbf{v}\right]_S=\begin{bmatrix}0&2&1\end{bmatrix}^T$. Do đó $$\left[\mathbf{v}\right]_B=\underset{B\leftarrow S}{P}\left[\mathbf{v}\right]_S=T^{-1}\left[\mathbf{v}\right]_S=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3/2&2&-1/2\\1/2&-1&1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\7/2\\-3/2\end{bmatrix}.$$ Véctơ tọa độ của **v** theo cơ sở *B* là $\left[\mathbf{v}\right]_B=\begin{bmatrix}5&\frac{7}{2}&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}^T$.	1.0
4	a	Dễ thấy $S=\left\{\mathbf{u},\mathbf{v}\right\}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của *W*, và do đó là một cơ sở của *W*. Áp dụng phương pháp trực giao hóa Gram-Schmidt cho hệ này, ta đặt	1.0

	b	$\mathbf{a}_1 = \mathbf{u}$; $\mathbf{a}_2 = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix} - \frac{5}{10}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1/2\\1/2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1/2\\-5/2\\1\end{bmatrix}.$ Để đơn giản cho việc tính toán ở bước sau, ta chọn lại $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}0 & -1 & -5 & 2\end{bmatrix}^T$, khi đó $\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right\}$ là một cơ sở trực giao của W.	
	b	Hình chiếu trực giao của $\mathbf{p}$ lên W là $\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{proj}_W\,\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2}\mathbf{a}_2 = \frac{9}{10}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{30}\begin{bmatrix}0\\-1\\-5\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}27\\-14\\11\\28\end{bmatrix}.$	**0.5**
		Đặt $\mathbf{z} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}-12\\-16\\4\\2\end{bmatrix}$, khi đó $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{z}$ là phân tích cần tìm.	**0.5**
5	**a**	Ta có $A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\-2 & 3 & -2\\-4 & 8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ $A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\-2 & 3 & -2\\-4 & 8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\-2 & 3 & -2\\-4 & 8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\\-8\end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$	**0.5**
		Do đó các véctơ $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ là các véctơ riêng tương ứng với giá trị riêng -1, còn $\mathbf{v}_3$ là véctơ riêng tương ứng với giá trị riêng -2.	**0.5**
	b	Dễ thấy họ véctơ $\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right\}$ độc lập tuyến tính và đều là các véctơ riêng tương ứng với giá trị riêng -1. Mặt khác véctơ riêng $\mathbf{v}_3$ tương ứng với giá trị riêng $-2 \neq -1$, nên họ $\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right\}$ gồm ba véctơ riêng độc lập tuyến tính của A, do đó A chéo hóa được.	**0.5**

		Đặt $P=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}, D=\operatorname{diag}\left(-1,-1,-2\right)$ thì $A=PDP^{-1}$ như yêu cầu của bài toán.	**0.5**
6	Trước hết, do khóa K là một ma trận 2×2 nên ta tách văn bản cần mã hóa thành những xâu độ dài 2: **INNOVATION= IN+NO+VA+TI+ON** Ta có $\mathbf{IN}\equiv\begin{bmatrix}8\\13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\14\end{bmatrix}\equiv\mathbf{LO}$ $\mathbf{NO}\equiv\begin{bmatrix}13\\14\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\15\end{bmatrix}\equiv\mathbf{BP}$ $\mathbf{VA}\equiv\begin{bmatrix}21\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}21\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}\equiv\mathbf{LB}$ $\mathbf{TI}\equiv\begin{bmatrix}19\\8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}19\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\7\end{bmatrix}\equiv\mathbf{NH}$ $\mathbf{ON}\equiv\begin{bmatrix}14\\13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\18\end{bmatrix}\equiv\mathbf{DS}$ Vậy chữ I**NNOVATION** được mã hóa thành chữ **LOBPLBNHDS.**		**1.0**
Tổng điểm			**10.0**