

Câu 1:		Điểm
1.	Các hàm thành phần $f(x) = \frac{4 \sin x}{x}$, $f(x) = a - 2x$ lần lượt liên tục trên các khoảng $(-\infty, 0)$ và $[0, \infty)$ với a tùy ý. Ta sẽ tìm a để hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 0$	0.25đ
2.	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a - 2x) = a$	0.25đ
3.	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 \sin x}{x} = 4$	0.25đ
4.	Suy ra, hàm liên tục tại $x = 0$ khi $a = 4$.	0.25đ
Tổng điểm Câu 1		1.00đ
Câu 2: Ta sẽ tìm tuyến tính hóa $L(x)$ của $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $a = 1000$.		
1.	Ta có $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(1000) = \frac{1}{300}$, $f(1000) = 10$.	0.25đ
2.	Suy ra, $L(x) = \frac{1}{300}(x - 1000) + 10$.	0.25đ
3.	Nên, $\sqrt[3]{x} = f(x) \approx L(x)$ khi x gần 1000.	0.25đ
4.	Từ đó, $\sqrt[3]{1001} = L(1001) = \frac{1}{300}(1001 - 1000) + 10 = 10,00\bar{3} \approx 10,003$.	0.25đ
Tổng điểm Câu 2		1.00đ
Câu 3: Gọi x là chiều dài cạnh của mặt đáy và h là chiều cao của hộp		
1.	Tổng diện tích các mặt của hộp: $A(x) = x^2 + 4hx$	0.50đ
2.	Thể tích của hộp: $V = x^2h = 32 \implies h = 32/x^2$	0.50đ
3.	Suy ra: $A(x) = x^2 + 128/x \implies A'(x) = 2x - 128/x^2$	0.25đ
4.	$A'(x) = 0 \iff x = 4$.	0.25đ
5.	$A'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi x đi qua 4.	0.25đ
6.	Vậy $A(x)$ nhận giá trị nhỏ nhất khi $x = 4 \text{ cm}$ và $h = 2 \text{ cm}$	0.25đ
Tổng điểm Câu 3		2.00đ
Câu 4:		
1.	$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$	0.50đ
2.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{1}{1+u^2} du = 2 \arctan \sqrt{x} + C$ (đặt $u = \sqrt{x}$)	0.50đ
3.	Suy ra,	0.50đ
	$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2 \arctan \sqrt{x}]_t^1 + \lim_{t \rightarrow \infty} [2 \arctan \sqrt{x}]_1^t$	

4.	$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - 2 \arctan \sqrt{t} \right] + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[2 \arctan \sqrt{t} - 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]$ $= \pi$	0.50đ
Tổng điểm Câu 4		2.00đ
Câu 5:		
1.	Đặt $a_n = \frac{n}{4^n}(x+1)^n$, ta có $\left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \left \frac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n(x+1)^n} \right = \left \left(\frac{n+1}{n} \right) \cdot \frac{x+1}{4} \right $	0.25đ
2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{x+1}{4} \right = \left \frac{x+1}{4} \right $	0.25đ
3.	Theo Tiêu chuẩn tỉ số (D'Alambert), chuỗi hội tụ khi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right < 1 \Leftrightarrow -5 < x < 3.$	0.25đ
4.	Khi $x = -5$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, và đây là chuỗi phân kì.	0.50đ
5.	Khi $x = 3$, chuỗi trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} n$, và đây là chuỗi phân kì.	0.50đ
6.	Vậy, miền hội tụ của chuỗi đã cho là $(-5, 3)$, với bán kính hội tụ bằng 4.	0.25đ
Tổng điểm Câu 5		2.00đ
Câu 6: Đặt $L = 4$, hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2L = 8$. Khi đó,		
1.	$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{8} \int_{-4}^0 -x dx = 1$	0.50đ
2.	$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^0 -x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ $= \frac{4}{(n\pi)^2} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{-8}{(n\pi)^2}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$	0.50đ
3.	$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^0 -x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ $= \frac{4}{n\pi} \cos(n\pi) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{nếu } n \text{ chẵn,} \\ \frac{-4}{n\pi}, & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases}$	0.50đ

4	Chuỗi Fourier là: $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{4}{(2k-1)\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)x\right) - \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)x\right) + \frac{4}{(2k)\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k)x\right) \right]$	0.50đ
Tổng điểm Câu 6		2.00đ