

Câu 1: $Nul A$ là không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất $Ax = 0$ .		<b>Điểm</b>
1.	Đưa ma trận hệ số $A$ (hoặc ma trận hệ số mở rộng) về dạng bậc thang rút gọn $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$	0.50đ
2.	Hệ phương trình tương ứng $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 0, \\ x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$ Chọn $x_2, x_4$ làm các biến tự do, suy ra $x_1 = -2s - 3t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = t.$	0.50đ
3.	Không gian nghiệm của hệ phương trình: $\left\{ \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$	0.50đ
4.	Vậy, một cơ sở của $Nul A$ gồm 2 vectơ: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .	0.50đ
Tổng điểm Câu 1		2.00đ
Câu 2: Giải các hệ phương trình sau		
1.	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ , ta nhận được $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$ .	0.75đ
2.	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , ta nhận được $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ .	0.75đ
3.	Vậy ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{C}$ là: $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ .	0.50đ
Tổng điểm Câu 2		2.00đ
Câu 3:		
1.	Biến đổi ma trận: $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	0.25đ

2.	Đưa về ma trận:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -15/2 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 23/2 & 3 & -21 \end{bmatrix}$	1.00đ	
3.	Suy ra, $A^{-1} =$	$\begin{bmatrix} -15/2 & -2 & 14 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 23/2 & 3 & -21 \end{bmatrix}$	0.25đ	
4.	Từ đó, $A^{-2} = (A^{-1})^2 =$	$\begin{bmatrix} 873/4 & 57 & -401 \\ 61/4 & 4 & -28 \\ -1317/4 & -86 & 605 \end{bmatrix}$	0.50đ	
Tổng điểm Câu 3			2.00đ	
Câu 4:				
1.	Ma trận của dạng toàn phương:	$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ .	0.25đ	
2.	Giải phương trình đặc trưng, được 3 giá trị riêng phân biệt 3, 9, 15.		0.50đ	
3.	Với $\lambda = 3$ , tìm được 01 vectơ riêng	$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , chuẩn hóa thành $u_1 =$	$\begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ .	0.25đ
4.	Với $\lambda = 9$ , tìm được 01 vectơ riêng	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ , chuẩn hóa thành $u_2 =$	$\begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ .	0.25đ
5.	Với $\lambda = 15$ , tìm được 01 vectơ riêng	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , chuẩn hóa thành $u_3 =$	$\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ .	0.25đ
6.	Đặt $P = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ và $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ . Khi đó, ta có $D = P^{-1}AP$ .		0.25đ	
7.	Dạng chính tắc của dạng toàn phương là: $3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2$ .		0.25đ	
Tổng điểm Câu 4			2.0đ	
Câu 5:				
1.	$\phi(n) = \phi(143) = 120$ .		0.50đ	
2.	Tính $e^{-1} \bmod \phi(n) = 113^{-1} \bmod 120 = 17$ .		0.50đ	
3.	Tính $97^{17} \bmod 143 = 15$ .		0.50đ	
4.	Vậy kí tự cần tìm là "E".		0.50đ	
Tổng điểm Câu 5			2.0đ	