Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học Cơ bản
Bộ môn Toán

Đáp án môn: Toán cao cấp A2
Mã môn học: MATH130201
Ngày thi: 03/06/2016

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&5&3\\1&1&1\end{bmatrix}.$	0,5
		Vì $\det A=3\neq 0$ nên *B* độc lập tuyến tính. Hơn nữa, $B\subset P_2[x]$ và số vectơ của B bằng $\dim P_2[x]$. Vì vậy, *B* là cơ sở của $P_2[x]$.	0,5
	b	$\begin{bmatrix}2&-1&3&0\\4&-2&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&3&0\\0&0&-5&0\end{bmatrix}$, hệ $\begin{cases}2a-b+3c=0\\4a-2b+\ c=0\end{cases}$ có nghiệm $\begin{cases}a=b/2\\b\in\mathbb{R}\\c=0\end{cases}$	0,5
		Cơ sở của W là $\left\{u_1=x^2+2x\right\}$ và $\dim W=1$	0,5
	c	$P_{B\to E}=\begin{bmatrix}-5/3&1&2/3\\1/3&0&-1/3\\5/3&-1&1/3\end{bmatrix}.$	1,0
2	a	Giá trị riêng $\lambda_1=3,\ \lambda_2=9$	0,5
		$*\lambda_1=3,\ X_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $*\lambda_2=9,\ Y_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}.$	0,5
		$\lambda_1=3$: Trực chuẩn $\begin{cases}v_1=X_1, & \dfrac{v_1}{\lVert v_1\rVert}=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix}\\ v_2=X_2-\dfrac{\langle X_2,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}\cdot v_1=\begin{bmatrix}1/5\\2/5\\1\end{bmatrix}, & \dfrac{v_2}{\lVert v_2\rVert}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{30}\\2/\sqrt{30}\\5/\sqrt{30}\end{bmatrix}\end{cases}$ $\lambda_2=9$: Trực chuẩn $\dfrac{Y_1}{\lVert Y_1\rVert}=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$	0,5

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>b</td><td>Vậy $P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = D.$</td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td>Thực hiện phép biến đổi $X = PY$, ta đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc
$f_{CT}\left(y\right) = 3y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2.$
$r\left(f\right) = 3$, f là dạng toàn phương xác định dương.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td rowspan="2">a</td><td>$F = x^2 + 5\ln(y+1) - e^z + 3yz - x^2yz$.
$z_x{}' = \dfrac{-(2x - 2xyz)}{-e^z + 3y - x^2y}, \quad z_y{}' = \dfrac{-\left(\dfrac{5}{y+1} + 3z - x^2z\right)}{-e^z + 3y - x^2y}$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>$z(-1,0) = 0$
$dz(-1,0) = z'_x(-1,0).\,dx + z'_y(-1,0).\,dy = -2dx + 5dy$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">b</td><td>Tìm điểm dừng: $\begin{cases} f_x{}' = 9x^2 - 9y = 0 \\ f_y{}' = -3(y+1)^2 - 9x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = -1, y = 1 \end{array}\right.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$f''_{xx} = 18x,\ f''_{xy} = -9,\ f''_{yy} = -6(y+1)$
+ Tại $M(0,0)$: $A = f''_{xx}(M) = 0,\ B = f''_{xy}(M) = -9, C = f''_{yy}(M) = -6$
$\Delta = AC - B^2 = -81 < 0$, do đó M không là điểm cực trị.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>+ Tại $N(-1,1)$: $A = f''_{xx}(N) = -18,\ B = f''_{xy}(N) = -9, C = f''_{yy}(N) = -12$
$\Delta = AC - B^2 = 135$. Vì $\begin{cases} A < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ nên N là điểm cực đại.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2"></td><td>Thay tọa độ của các điểm $M_1\left(0, 9/5\right), M_2\left(4, -3\right), M_3\left(1, 12/5\right)$ lần lượt vào phương trình $Ax^2 + By^2 + Cx + D = 0$, ta được hệ phương trình
$\begin{cases} \dfrac{81}{25}B + D = 0 \\ 16A + 9B + 4C + D = 0 \\ A + \dfrac{144}{25}B + C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16A + 9B + 4C + D = 0 \\ 81.B + 25D = 0 \\ 25A + 144B + 25C + 25D = 0 \end{cases}.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 81 & 0 & 25 & 0 \\ 25 & 144 & 25 & 25 & 0 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 16 & 9 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 81 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 24300 & -21600 & 0 \end{bmatrix}$
Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} A = -D/9 \\ B = -25D/81 \\ C = 8D/9 \\ D \in \mathbb{R} \end{cases}$. Cho $D = 81$, suy ra $\begin{cases} A = -9 \\ B = -25 \\ C = 72 \end{cases}$.
Phương trình quỹ đạo của tiểu hành tinh Z là $-9x^2 - 25y^2 + 72x + 81 = 0$.</td><td>1,0</td></tr>
</table>