TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2014-2015
Môn: Toán cao cấp A1 (CĐ)
Mã môn học: 1001111
Ngày thi: 10/06/2015 Thời gian: 90 phút
Đề thi có 1 trang Đề số: 1
SV được phép sử dụng tài liệu.

Câu 1: (2 điểm) Cho số phức $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$. Tính z^{2015} và $\sqrt[3]{z}$.

Câu 2: (1,5 điểm) Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x}, & x\neq 0\\ m, & x=0\end{cases}.$$

a. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.
b. Với giá trị m vừa tìm được ở câu a, xét sự khả vi của $f(x)$ tại $x_0=0$.

Câu 3: (2 điểm) Xét sự hội tụ của các tích phân

a. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}+x^2+1}{x^5-x+5}dx$ b. $J=\displaystyle\int_0^1\frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$

Câu 4: (2 điểm)

a. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n+1}$.
b. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n.5^n}x^n$.

Câu 5: (2,5 điểm)

a. Tìm giới hạn $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3}{x^2+2y^2}$.
b. Tìm cực trị tự do của hàm hai biến $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+3xy+x-2y+5$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Ngày 5 tháng 6 năm 2015
Thông qua bộ môn

ĐÁP ÁN

Câu 1. $z=\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4}+i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$ 0,5đ

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{-5\pi}{12}+i\sin\dfrac{-5\pi}{12}\right)$. 0,5đ

$z^{2015}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2015}\left(\cos\dfrac{-5.2015\pi}{12}+i\sin\dfrac{-5.2015\pi}{12}\right)$. 0,5đ

$\sqrt[3]{z}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\cos\dfrac{-5\pi/12+k2\pi}{3}+i\sin\dfrac{-5\pi/12+k2\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$. 0,5đ

Câu 2.

a. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x}=0$. 0,5đ

$f(0)=m$; $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow m=0$. 0,5đ

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x^2}=3$ (hữu hạn). Do đó, $f(x)$ khả vi tại $x_0=0$. 0,5đ

Câu 3.

a. Ta có $\dfrac{x\sqrt{x}+x^2+1}{x^5-x+5}\geq 0,\forall x\geq 1$.

Khi $x\to+\infty,\dfrac{x\sqrt{x}+x^2+1}{x^5-x+5}\sim\dfrac{x^2}{x^5}=\dfrac{1}{x^3}$; 0,5đ

Mà $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx$ hội tụ (vì $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$) nên I hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2. 0,5đ

b. Ta có $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\geq 0,\forall x\in(0,1]$.

Khi $x\to 0^+$, $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\sim\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 0,5đ

Mà $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$) nên J hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2. 0,5đ

Câu 4.

a. Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n+1}}=\dfrac{1}{2}<1$ nên chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy. 0,5đ

b. $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n5^n}}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow R=5$. Chuỗi có khoảng hội tụ: $(-5,5)$. 0,5đ

Tại $x=-5$, chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n5^n}(-5^n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz. 0,5đ

Tại $x=5$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n5^n}5^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kì.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là $[-5;5)$. 0,5đ

Câu 5.

a. $0\le\left|\frac{x^3}{x^2+2y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+2y^2}.|x|\le|x|,\ \forall(x,y)\ne(0,0)$ 0,5đ

Mà $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}0=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0$ nên $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3}{x^2+2y^2}=0$. 0,5đ

b. $\begin{cases}f'_x=x+3y+1=0\\f'_y=y+3x-2=0\end{cases}$ 0,5đ

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=7/8\\y=-5/8\end{cases}$. Suy ra $f(x)$ có điểm dừng $M(7/8;-5/8)$. 0,5đ

$A=1,B=3,C=1,\Delta=AC-B^2=-8$.

Tại $M(7/8;-5/8)$,do $\Delta=-8<0$ nên $f(x)$ không đạt cực trị tại M. 0,5đ