

Bài 1 (2,5 điểm) Một vật khối lượng m (kg) rơi theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu v_0 (m/s) trong môi trường có sức cản không khí tỷ lệ với vận tốc (hệ số tỷ lệ k), và gia tốc trọng trường g (m/s²). Biết vận tốc $v(t)$ (m/s) của vật thỏa phương trình vi phân

$$v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t), v(0) = 0$$

Cho $g = 10$, $m = 0,5$, $k = 4$.

- Áp dụng phương pháp Ôle với $h = 0,1$, tính $v(0,2) \approx$ (1) và $v(0,5) \approx$ (2)
- Áp dụng phương pháp Ôle cải tiến, với $h = 0,1$, tính $v(0,2) \approx$ (3) và $v(0,6) \approx$ (4). Từ kết quả đó suy ra gia tốc tại điểm $t = 0,2s$ là $v'(0,2) \approx$ (5).

Bài 2 (2 điểm) (trong bài này chúng ta bỏ qua đơn vị)

Một vật chuyển động thẳng trên trục $0x$ từ a đến b dưới tác động của ngoại lực biến thiên $F(x)$ cùng hướng chuyển động của vật. Khi đó công W của lực $F(x)$ được tính bởi công thức

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

Cho $a = 0$, $b = 1,2$ và $F(x) = x\sqrt{x+1}$.

- Áp dụng công thức hình thang 3 đoạn chia. Khi đó $W \approx$ (6) với sai số tuyệt đối $\Delta \leq$ (7).
- Áp dụng công thức Simpson 4 đoạn chia: $y_2 = F(x_2) =$ (8), $W \approx$ (9).

Bài 3 (1,5 điểm) (trong bài này chúng ta bỏ qua đơn vị)

Khảo sát độ bền uốn $y(x)$ của một loại vật liệu bằng cách tác động cùng một (loại) lực lên cùng một diện tích bề mặt của các miếng vật liệu giống nhau có bề dày x thay đổi. Chúng ta có bảng số liệu

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	515	518	522	525	528	531

Áp dụng phương pháp Bình phương bé nhất với dạng phương trình $y = A + B\sqrt{x}$, suy ra $A =$ (10) và $B =$ (11). Dự đoán y khi $x = 0,25$ là $y(0,25) =$ (12)

Bài 4 (1,5 điểm) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 12e^{-5t} + 5 \int_0^t y(u) \cos 2(t-u) du$$

Bài 5 (2,5 điểm) Cho phương trình vi phân

$$y''(t) + 6y'(t) + 18y(t) = 3 \sin 2t, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

- Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân trên.
- Giả sử $y(t)$ là phương trình chuyển động thẳng của một chất điểm theo thời gian t . Xác định giá trị (gần đúng) của biên độ chuyển động khi t đủ lớn.

*** Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Ngày 5 tháng 6 năm 2014

Bộ môn duyệt

Bài 1 (2,5 điểm) Một vật khối lượng m (kg) rơi theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu v_0 (m/s) trong môi trường có sức cản không khí tỷ lệ với vận tốc (hệ số tỷ lệ k), và gia tốc trọng trường g (m/s²). Biết vận tốc $v(t)$ (m/s) của vật thỏa phương trình vi phân

$$v'(t) = g - \frac{k}{m}v(t), \quad v(0) = 0$$

Cho $g = 10$, $m = 1$, $k = 3$.

- Áp dụng phương pháp Ôle với $h = 0,1$, tính $v(0,2) \approx$ (1) và $v(0,5) \approx$ (2)
- Áp dụng phương pháp Ôle cải tiến, với $h = 0,1$, tính $v(0,2) \approx$ (3) và $v(0,6) \approx$ (4). Từ kết quả đó suy ra gia tốc tại điểm $t = 0,2s$ là $v'(0,2) \approx$ (5).

Bài 2 (2 điểm) (trong bài này chúng ta bỏ qua đơn vị)

Một vật chuyển động thẳng trên trục $0x$ từ a đến b dưới tác động của ngoại lực biến thiên $F(x)$ cùng hướng chuyển động của vật. Khi đó công W của lực $F(x)$ được tính bởi công thức

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

Cho $a = 0$, $b = 1,2$ và $F(x) = x\sqrt{x+1}$.

- Áp dụng công thức hình thang 3 đoạn chia. Khi đó $W \approx$ (6) với sai số tuyệt đối $\Delta \leq$ (7).
- Áp dụng công thức Simpson 4 đoạn chia: $y_2 = F(x_2) =$ (8), $W \approx$ (9).

Bài 3 (1,5 điểm) (trong bài này chúng ta bỏ qua đơn vị)

Khảo sát độ bền uốn $y(x)$ của một loại vật liệu bằng cách tác động cùng một (loại) lực lên cùng một diện tích bề mặt của các miếng vật liệu giống nhau có bề dày x thay đổi. Chúng ta có bảng số liệu

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	415	421	428	435	438	441

Áp dụng phương pháp Bình phương bé nhất với dạng phương trình $y = A + B\sqrt{x}$, suy ra $A =$ (10) và $B =$ (11). Dự đoán y khi $x = 0,25$ là $y(0,25) =$ (12)

Bài 4 (1,5 điểm) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 12e^{-5t} + 5 \int_0^t y(u) \cos 2(t-u) du$$

Bài 5 (2,5 điểm) Cho phương trình vi phân

$$y''(t) + 6y'(t) + 18y(t) = 3 \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

- Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân trên.
- Giả sử $y(t)$ là phương trình chuyển động thẳng của một chất điểm theo thời gian t . Xác định giá trị (găng đúng) của biên độ chuyển động khi t đủ lớn.

*** Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Ngày 5 tháng 6 năm 2014

Bộ môn duyệt

ĐÁP ÁN MÔN TOÁN ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT

Mã môn: MATH131501

Ngày thi: 6/6/2014

Bảng trả lời bài 1, 2, 3:

Đề 1: (Bài 1: m = 0,5 ; k = 4)

Câu	Đáp án	Điểm	Câu	Đáp án	Điểm
(1)	$v(0,2) \approx 1,2$	0,5	(7)	$\Delta \leq 0,016$	0,5
(2)	$v(0,5) \approx 1,2496$	0,5	(8)	$y_2 = F(x_2) = 0,7589$	0,5
(3)	$v(0,2) \approx 0,912$	0,5	(9)	$W \approx 0,96276$	0,5
(4)	$v(0,6) \approx 1,225287$	0,5	(10)	$A \approx 502,97126$	0,5
(5)	$v'(0,2) \approx 2,704$	0,5	(11)	$B \approx 35,37548$	0,5
(6)	$W \approx 0,97456$	0,5	(12)	$y(0,25) \approx 520,659$	0,5

Đề 2: (Bài 1: m = 1 ; k = 3)

Câu	Đáp án	Điểm	Câu	Đáp án	Điểm
(1)	$v(0,2) \approx 1,7$	0,5	(7)	$\Delta \leq 0,016$	0,5
(2)	$v(0,5) \approx 2,7731$	0,5	(8)	$y_2 = F(x_2) = 0,7589$	0,5
(3)	$v(0,2) \approx 1,48325$	0,5	(9)	$W \approx 0,96276$	0,5
(4)	$v(0,6) \approx 2,76341$	0,5	(10)	$A \approx 395,62652$	0,5
(5)	$v'(0,2) \approx 5,55025$	0,5	(11)	$B \approx 59,62675$	0,5
(6)	$W \approx 0,97456$	0,5	(12)	$y(0,25) \approx 425,439895$	0,5

Bài 4: Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với

$$y(t) = 12e^{-5t} + 5y(t) * \cos 2t$$

Đặt $Y = Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$, và biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng định lý Borel ta được

$$Y = \frac{12}{p+5} + 5Y \frac{p}{p^2+4} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{12(p^2+4)}{(p+5)(p-1)(p-4)} \stackrel{(*)}{=} \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-4} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Biến đổi Laplace ngược ta được

$$y(t) = Ae^{-5t} + Be^t + Ce^{4t} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Từ đẳng thức (*) tính được $A = 58/9$, $B = -10/3$, $C = 80/9$ (0,25 điểm)

Bài 5:

a) Đặt $Y = Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$, biến đổi Laplace hai vế phương trình và áp dụng tính chất đạo hàm gốc ta được

$$p^2Y + 6pY + 18Y = \frac{6}{p^2+4} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{6}{(p^2+4)[(p+3)^2+9]} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

$$= \frac{Ap+2B}{p^2+4} + \frac{C(p+3)+3D}{(p+3)^2+9} = \frac{Ap}{p^2+4} + \frac{2B}{p^2+4} + \frac{C(p+3)}{(p+3)^2+9} + \frac{3D}{(p+3)^2+9} \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Biến đổi Laplace ngược ta được

$$y(t) = A \cos 2t + B \sin 2t + e^{-3t}(C \cos 3t + D \sin 3t) \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\text{với } A = -9/85, B = 21/170, C = 9/85, D = 2/85 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

b) Khi t đủ lớn: $e^{-3t}(C \cos 3t + D \sin 3t) \approx 0$, đặt $\sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \wedge \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\text{Khi đó } y(t) \approx A \cos 2t + B \sin 2t = \sqrt{A^2+B^2} \sin(\alpha + 2t) \quad (0,25)$$

Đây là phương trình chuyển động của dao động điều hòa có biên độ dao động là $\sqrt{A^2+B^2}$

Vậy biên độ chuyển động gần bằng $\sqrt{A^2+B^2}$, với $A = -9/85, B = 21/170$ (0,25 điểm)

Hết