

ĐỀ THI MÔN: TOÁN CAO CẤP C₂

Mã môn học: **MATH 130901** -Đề thi gồm **01** trang

Thời gian : 90 phút **Được sử dụng tài liệu** (Ngày thi: 16/6/2014)

Câu 1 (1,5 điểm) Cho hàm sản xuất dạng Cobb-Douglas : $Q(K, L) = 20.L^{2/3}K^{1/3}$

(Q là sản lượng-đơn vị là 1000 sản phẩm; K là vốn-đơn vị là \$1,000,000 ; L là lực lượng lao động-đơn vị là 1000 người)

- a) Tìm sản lượng biên tế của vốn Q'_K và sản lượng biên tế của lực lượng lao động Q'_L ở mức $K = 5$ và $L = 3$.
- b) Giả sử $K = 5, L = 3$, lực lượng lao động tăng 60 người/năm, vốn giảm \$150,000 /năm. Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp, ước tính tốc độ thay đổi của sản lượng.

Câu 2 (1,5 điểm) **Bài toán phân bổ vốn và đầu tư sao cho sản lượng lớn nhất**

Công ty ước tính được nếu đầu tư x (đơn vị là \$1,000) cho lực lượng lao động và y (đơn vị là \$1,000) cho trang thiết bị sản xuất thì số sản phẩm sản xuất được là

$$Q(x, y) = 100x^{1/3}y^{2/3} \quad \text{đơn vị sản phẩm}$$

Biết số tiền đầu tư của công ty không vượt quá \$360,000. Hỏi công ty phải đầu tư bao nhiêu tiền cho lực lượng lao động, và bao nhiêu tiền cho trang thiết bị sản xuất để sản lượng lớn nhất ($Q(x, y)$ lớn nhất)?

Câu 3 (2 điểm) (**Resale value problem**)

Giá trị bán lại $r(t)$ của một máy sau t năm (tính từ lúc mua) sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của máy. Tức là, nếu S là giá trị phế liệu của máy thì $r(t)$ thỏa phương trình

$$\frac{dr}{dt} = -k(r - S), \text{ với } k = \text{const} > 0 \text{ là hằng số tỷ lệ}$$

Xác định $r(t)$ biết giá trị mua mới của máy là \$24,000, giá trị 3 năm sau là \$12,000 và giá trị phế liệu $S = \$500$.

Câu 4 (2 điểm) (thời gian t tính bằng tháng, giá p tính bằng USD)

Biết giá $p = p(t)$ của một loại sản phẩm (hàng hóa) tại thời điểm t thỏa phương trình vi phân

$$p'' + 8p' + 16p = 800 + e^{-t}, \quad p(0) = 70, \quad p'(0) = -1$$

Giải phương trình vi phân trên. Ước tính giá của sản phẩm sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Câu 5 (2 điểm) (**Mô hình tăng trưởng logistic**)

Giả sử dân số một quốc gia sau t năm tính từ năm 2013 là $p(t)$, đơn vị tính 10 triệu người, được xấp xỉ bởi mô hình phương trình vi phân logistic

$$p'(t) = 0.003p\left(1 - \frac{1}{18}p\right), \quad p(0) = 9 \quad (\text{tức là, năm 2013 dân số quốc gia là 90 triệu người})$$

Giải phương trình tìm $p(t)$ và ước tính giá trị của $p(t)$ khi t đủ lớn.

Câu 6 (1 điểm) Tính tích phân kép $I = \iint_D 10ye^{-xy} dx dy$; với $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{y} \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$.

*** Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Ngày 13 tháng 6 năm 2014

Bộ môn duyệt

ĐÁP ÁN TOÁN C₂(ngày thi 16/6/2014)

Câu hỏi	Nội dung	Điểm
Câu 1		1,5đ
	<p>a) Sản lượng biên tế của vốn : $Q'_K = \frac{20}{3} \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{2}{3}}$</p> <p>Sản lượng biên tế của lực lượng lao động: $Q'_L = \frac{40}{3} \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{3}}$</p>	0.5đ
	<p>Sản lượng biên tế của vốn ở mức $K = 5$ và $L = 3$:</p> $Q'_K(5,3) = \frac{20}{3} \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 4,74 \quad (1000 \text{ sản phẩm})$ <p>Sản lượng biên tế của lực lượng lao động Q'_L ở mức $K = 5$ và $L = 3$:</p> $Q'_L(5,3) = \frac{40}{3} \left(\frac{5}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 15,81 \quad (1000 \text{ sản phẩm})$	0.25đ
	<p>b) Lực lượng lao động tăng 60 người/năm: $\frac{dL}{dt} \approx 0,06$</p> <p>Vốn giảm \$150,000/năm: $\frac{dK}{dt} \approx -0,15$</p> <p>Ước tính tốc độ thay đổi sản lượng</p> $\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{dK}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{dL}{dt} \approx 4,74 \times (-0,15) + 15,81 \times 0,06 = 0,2376 \quad (1000 \text{ sản phẩm/năm})$	0.25đ
		0.5đ
Câu 2		1.5đ
	<p>Hệ phương trình xác định điểm dừng $\begin{cases} Q'_x = \frac{100}{3} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{2}{3}} = 0 \\ Q'_y = \frac{200}{3} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{3}} = 0 \end{cases}$ vô nghiệm.</p> <p>♦ Xét trên biên: $\begin{cases} x = 0 \\ 0 \leq y \leq 360 \end{cases}$ $Q(x, y) = 0$</p> <p>♦ Xét trên biên: $\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leq x \leq 360 \end{cases}$ $Q(x, y) = 0$</p> <p>♦ Xét trên biên: $\begin{cases} y = 360 - x \\ 0 \leq x \leq 360 \end{cases}$ $Q(x, y) = 100x^{\frac{1}{3}}(360 - x)^{\frac{2}{3}} = f(x), x \in [0, 360]$ $f'(x) = 0$</p> <p>$f(0) = 0, f(360) = 0$</p>	0.5đ
		0.25đ

	$f'(x) = \frac{100}{3} \left(\frac{360-x}{x} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{200}{3} \left(\frac{x}{360-x} \right)^{\frac{1}{3}}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{3} \left(\frac{360-x}{x} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{200}{3} \left(\frac{x}{360-x} \right)^{\frac{1}{3}} = 0$ <p>Đặt $t = \frac{360-x}{x}$ rồi thay vào phương trình giải được $t = 2$, từ đó tính được $x = 120$ và $y = 240$.</p> <p>$f(120) = 100(120)^{\frac{1}{3}}(240)^{\frac{2}{3}} = 12000\sqrt[3]{4} \approx 19049$ (sản phẩm)</p> <p>Vậy công ty phải đầu tư \$120,000 cho lực lượng lao động và \$240,000 cho trang thiết bị sản xuất để sản lượng lớn nhất xấp xỉ 19049 (sản phẩm).</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.25đ</p>
Câu3		2đ
	<p>Phương trình được viết lại</p> $r'(t) + kr = 0,5k, \text{ với } \begin{cases} r(0) = 24 \\ r(3) = 12 \end{cases} \text{ (đơn vị \$1000)}$ <p>Nghiệm tổng quát phương trình</p> $r(t) = e^{-\int kdt} \left(\int 0,5ke^{\int kdt} dt + C \right) = e^{-kt} \left(\int 0,5ke^{kt} dt + C \right)$ $= e^{-kt} (0,5e^{kt} + C) = 0,5 + Ce^{-kt}$	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
	$\begin{cases} r(0) = 24 \\ r(3) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + C = 24 \\ 0,5 + Ce^{-3k} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 23,5 \\ k = 0,2382 \end{cases}$ <p>Vậy $r(t) = 0,5 + 23,5e^{-0,2382t}$ (đơn vị \$1000)</p> <p>hay $r(t) = 500 + 23500e^{-0,2382t}$ (đơn vị \$1)</p>	0.5đ
Câu4		2đ
	<p>Phương trình thuần nhất tương ứng : $p'' + 8p' + 16p = 0$</p>	
	<p>Phương trình đặc trưng: $k^2 + 8k + 16 = 0 \Leftrightarrow k = -4$ (nghiệm kép)</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất: $P_o(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm riêng phương trình $p'' + 8p' + 16p = 800$ (1) dạng $Y_1 = A$</p> <p>Tính được $Y_1' = 0, Y_1'' = 0$. Thay vào (1) được $A = 50$.</p> <p>Suy ra $Y_1 = 50$</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm riêng phương trình $p'' + 8p' + 16p = e^{-t}$ (2) dạng $Y_2 = Be^{-t}$</p> <p>Tính được $Y_2' = -Be^{-t}, Y_2'' = Be^{-t}$. Thay vào (2) được $B = \frac{1}{9}$.</p> <p>Suy ra $Y_2 = \frac{1}{9}e^{-t}$</p>	0.25đ
	<p>Theo nguyên lý chồng chất nghiệm thì nghiệm riêng của phương trình $p'' + 8p' + 16p = 800 + e^{-t}$ là $\bar{P}(t) = Y_1 + Y_2 = 50 + \frac{1}{9}e^{-t}$</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm tổng quát phương trình $p'' + 8p' + 16p = 800 + e^{-t}$ là</p>	

$p(t) = P_o(t) + \bar{P}(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t} + 50 + \frac{1}{9} e^{-t}$ $p(0) = 70, p'(0) = -1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{179}{9}, C_2 = \frac{236}{3}$ $p(t) = \frac{179}{9} e^{-4t} + \frac{236}{3} t e^{-4t} + 50 + \frac{1}{9} e^{-t}$	0.25đ
<p>Khi t đủ lớn $C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t} + \frac{1}{9} e^{-t} \approx 0$ nên $p(t) \approx 50$ (USD)</p> <p>Sau khoảng thời gian t đủ lớn, giá sản phẩm xấp xỉ \$50.</p>	0.5đ

Câu 5**2đ**

<p>Phương trình được viết lại</p> $p'(t) - 0,003p = \frac{-0,003}{18} p^2 \Leftrightarrow \frac{p'}{p^2} - 0,003 \frac{1}{p} = \frac{-0,003}{18}$ <p>Đặt $y = \frac{-1}{p} \Rightarrow y' = \frac{p'}{p^2}$. Thay vào phương trình được</p> $y' + 0,003y = \frac{-0,003}{18}$	0.5đ
$\Leftrightarrow y = e^{-\int 0,003 dt} \left(\int \frac{-0,003}{18} e^{\int 0,003 dt} dt + C \right)$	0.5đ
$\Leftrightarrow y = e^{-0,003t} \left(\int \frac{-0,003}{18} e^{0,003t} dt + C \right)$ $\Leftrightarrow y = e^{-0,003t} \left(\frac{-1}{18} e^{0,003t} + C \right) \Leftrightarrow \frac{-1}{p} = \frac{-1}{18} + C e^{-0,003t}$ $\Leftrightarrow p = \frac{18}{1 - 18C e^{-0,003t}}$	0.5đ
$p(0) = 9 \Leftrightarrow C = \frac{-1}{18}$ $p(t) = \frac{18}{1 + e^{-0,003t}}$	0.25đ
<p>Khi t đủ lớn $p(t) \approx 18$. Nói cách khác, sau khoảng thời gian t đủ lớn, dân số quốc gia xấp xỉ 180 triệu người.</p>	0.25đ

Câu 6**1đ**

$I = \iint_D 10ye^{-xy} dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{\frac{1}{y}} 10ye^{-xy} dx = \int_1^2 \left(-10e^{-xy} \right) \Big _0^{\frac{1}{y}} dy$	0.5đ
$= \int_1^2 \left(10 - 10e^{-1} \right) \Big _0^{\frac{1}{y}} dy = 10 - \frac{10}{e}$	0.5đ

.....**Hết**.....