Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM — **Khoa Khoa học cơ bản**

Đáp án môn: Đại số
Mã môn học: MATH 141401
Ngày thi: 04/01/2016

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1	a	$\det A = 8m^2 - 4m$ và $A_1 = \begin{bmatrix} m & 1 & -5 \\ 1 & m & m-3 \\ -2 & 2 & m-7 \end{bmatrix}$ Hệ có vô nghiệm $\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1/2 \end{array}\right.$ + Với $m=0$: Vì $\det A_1 = 3 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.	0,5
		+ Với $m=1/2$: $\det A_1 = -21/8 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm. Do đó, với $m=0, m=1/2$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1/2 \end{cases}$	0,5
	b	$\det A = -8, \det B = 2, \det C = 5, \det(A+B) = -3$ $\det X = \dfrac{\det B}{2^3 \det A . \det C . \det(A+B)} = \dfrac{1}{480}$.	1,0
2	a	$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & m \end{bmatrix} \ldots \to \ldots \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,5
		Vì $E \subset P_2[x]$ nên E là hệ sinh của $P_2[x]$ khi và chỉ khi $r(A) = \dim P_2[x]$, tức là $m \neq 1$.	0,5
	b	Một cơ sở của $\ker f$ là $\{\mathbf{u} = x^2 - 1\}$, và $\dim \ker f = 1$	1,0
3	a	$\lambda_1 = 7$: $X = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} (b \neq 0)$ $\lambda_2 = -3$: $X = \begin{bmatrix} 3c/2 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} (c \neq 0)$ $\lambda_3 = 10$: $X = \begin{bmatrix} -2c/3 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} (c \neq 0)$	1,5
	b	Các vectơ riêng cơ sở trực chuẩn: $Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 0 \\ 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 0 \\ 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$	0,5

		Đặt $P=\begin{bmatrix} 0 & 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$. Khi đó $P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ và P là ma trận trực giao.	
		Phép biến đổi $X=PY$ đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc: $f_{CT}\left(y_1,y_2,y_3\right)=7y_1^2-3y_2^2+10y_3^2$.	**0,5**
4	**a**	**1**. Phép nhân ma trận là phép toán hai ngôi trên G vì, với $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\in G$ thì $\mathbf{u}.\mathbf{v}=\begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}\in G$. **2.** Tính kết hợp: Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp **3**. Phần tử trung hòa là $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\in G\left(khi\ a=1, b=0\right)$, vì $I.\mathbf{u}=\mathbf{u}.I=\mathbf{u}$, với mọi $\mathbf{u}\in G$. **4.** Với $\mathbf{u}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\in G\left(a^2+b^2\neq 0\right)$, phần tử nghịch đảo của $\mathbf{u}$ là $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ vì $\mathbf{v}.\mathbf{u}=I=\mathbf{u}.\mathbf{v}$, hơn nữa dễ thấy $\mathbf{v}\in G$. Vậy G cùng phép nhân ma trận là một nhóm.	**1,0**
	b	Với $z=a+b.i,\ \ t=c+d.i$ thì $z.t=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right).i$. Do đó: $\begin{cases} g\left(z.t\right)=\begin{bmatrix} ac-bd & -\left(ad+bc\right) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} \\ g\left(z\right).g\left(t\right)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac-bd & -\left(ad+bc\right) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} \end{cases}$ Vậy $g\left(z.t\right)=g\left(z\right).g\left(t\right) \quad \left(\forall z,t\in A\right)$ Vậy g là đồng cấu nhóm.	**1,0**
5		1. $p=31, q=5$ 2. $n=p.q=155$ 3. $\phi\left(n\right)=\left(p-1\right)\left(q-1\right)=120$ 4. Chọn $e=7$ 5. Tìm d sao cho $de\equiv 1\left(\text{mod}120\right)\Rightarrow d=103$ 6. Khóa lập mã $n=155, e=7$ Khóa giải mã $n=155, d=103$.	**0,5**
		Mã hóa bản rõ $M=03$ $C\equiv M^e\left(\text{mod}\,n\right)\equiv 3^7\left(\text{mod}155\right)\equiv 17\left(\text{mod}155\right)\Rightarrow C=17$.	**0,5**
		Giải mã bản mã $C=04$ $M\equiv C^d\left(\text{mod}\,n\right)\equiv 4^{103}\left(\text{mod}155\right)\equiv 64\left(\text{mod}155\right)\Rightarrow M=64$	**0,5**