ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN BỘ MÔN TOÁN	ĐỀ THI MÔN: **ĐẠI SỐ** Mã môn học: **MATH 141401** Ngày thi: **30/12/2014.** Thời gian làm bài: **90 phút** Sinh viên được sử dụng tài liệu

***Chú ý:* Đề thi có 14 ý, mỗi ý 1 điểm. Sinh viên chỉ được chọn 10 ý để làm bài.**

Câu 1: Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3m+1 & 1 & 0\\ m & m+9 & 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\ m+2\\ 14\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$.

a/ *(1điểm)* Tìm m để hệ phương trình tuyến tính $A.X=B$ có vô số nghiệm.

b/ *(1điểm)* Với $m=-3$, tính $\det\left(5.A^{2014}\right)$.

Câu 2: Cho $B=\{u_1=(0,2,1); u_2=(1,1,0); u_3=(1,0,-1)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $E=\{v_1=2x, v_2=-x^2+1, v_3=x^2+x+1\}$ là một cơ sở của $P_2[x]$. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to P_2[x]$ được xác định bởi $f(a,b,c)=(a+2b).x^2+(b+c).x+(a+b-c)$.

a/ *(1điểm)* Tìm một cơ sở và số chiều của $\operatorname{Im} f$.

b/ *(1điểm)* Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B,E.

c/ *(1điểm)* Trong $P_2[x]$ cho tích vô hướng $\langle u,v\rangle=\int_{-1}^{1}u(x).v(x)\,dx$. Hãy trực giao cơ sở E.

Câu 3: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 0\\ -3 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ và $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$.

a/ *(1điểm)* Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

b/ *(1điểm)* Đưa dạng toàn phương $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+4x_3^2-6x_1x_2$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

c/ *(1điểm)* Đưa dạng toàn phương $g(x_1,x_2,x_3)=X^TA^{2014}X$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Câu 4: Cho ánh xạ $g:\mathbb{Z}\to G$ xác định bởi $g(k)=3k+3,\ \forall k\in\mathbb{Z}$, với $\mathbb{Z}$ là tập số nguyên và tập $G=\{n=3k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

a/ *(1điểm)* Chứng minh quy tắc $n\otimes k := n+k-3$ (với mọi $n,k\in G$) là một phép toán hai ngôi trên G.

b/ *(1điểm)* Chứng minh G cùng với phép toán $\otimes$ là một nhóm Abel *(nhóm Abel là nhóm giao hoán)*.

c/ *(1điểm)* Chứng minh ánh xạ g là một song ánh.

d/ *(1điểm)* Chứng minh g là một đồng cấu từ nhóm $(\mathbb{Z},+)$ *(nhóm các số nguyên $\mathbb{Z}$ với phép cộng các số nguyên)* vào nhóm $(G,\otimes)$. Từ đó suy ra $g:(\mathbb{Z},+)\to(G,\otimes)$ là một đẳng cấu nhóm.

Câu 5: Ma trận vuông A được gọi là ma trận lũy đẳng nếu $A^2=A$.

a/ *(1điểm)* Chứng tỏ rằng $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận lũy đẳng. Ma trận A có khả nghịch không?

b/ *(1điểm)* Chứng minh rằng nếu $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ là các ma trận lũy đẳng và $AB=BA$ thì AB cũng là ma trận lũy đẳng.

CBCT không giải thích đề thi.

Ngày tháng năm

Bộ môn Toán