Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học cơ bản

Đáp án môn: Đại số
Mã môn học: MATH 141401
Ngày thi: 30/12/2014

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">a</td><td>$\det A = 9m^2 + 27m + 18$
Hệ có VSN $\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-2 \end{array}\right.$
+ Với $m=-1$: $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 8 & 9 & 14 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 10 & 12 & 18 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, vì
$r(A) = r(\overline{A}) = 2 \neq$ số ẩn nên hệ có VSN.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>+ Với $m=-2$: vì $\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 14 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.
Vậy với $m=-1$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Với $m=-3$, ta có $\det A = 18$ và A là ma trận vuông cấp 3. Do đó
$\det\left(5.A^{2014}\right) = 5^3 \det\left(A^{2014}\right) = 5^3.\left(\det A\right)^{2014} = 5^3.18^{2014}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">a</td><td>$f(u_1) = 4x^2 + 3x + 1$
$f(u_2) = 3x^2 + x + 2$
$f(u_3) = x^2 - x + 2$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to ..... \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Vì $\operatorname{Im} f = \langle f(u_1), f(u_2), f(u_3) \rangle$ nên cơ sở của $\operatorname{Im} f$ là
$\{t_1 = 4x^2 + 3x + 1, \quad t_2 = -5x + 5\}$ và $\dim \operatorname{Im} f = 2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>$f(u_1) = av_1 + bv_2 + cv_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$, $\left[f(u_1)\right]_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Tương tự $\left[f(u_2)\right]_E = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, $\left[f(u_3)\right]_E = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.
Vậy $[f]_{B,E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>c</td><td>Cơ sở trực giao tương ứng với cơ sở E là $\begin{cases} w_1 = 2x \\ w_2 = -x^2 + 1 \\ w_3 = \dfrac{5}{2}x^2 - \dfrac{1}{2} \end{cases}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">3</td><td>a</td><td>$\lambda_1 = 8:\ X = \begin{bmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} (c \neq 0)$
$\lambda_2 = 2:\ X = \begin{bmatrix} c \\ c \\ 0 \end{bmatrix} (c \neq 0)$
$\lambda_3 = 4:\ X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} (c \neq 0)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>Các vectơ riêng cơ sở trực chuẩn: $Y_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
Đặt $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ và P là ma trận trực giao.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Phép biến đổi $X = PY$ đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc:
$f_{CT}(y_1, y_2, y_3) = 8y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">c</td><td>Ma trận của g là A^{2014}. Ta có $P^{-1}A^{2014}P = D^{2014} = \begin{bmatrix} 8^{2014} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2014} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2014} \end{bmatrix}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Phép biến đổi $X = PY$ đưa dạng toàn phương g về dạng chính tắc
$g_{CT}(y_1, y_2, y_3) = 8^{2014}y_1^2 + 2^{2014}y_2^2 + 4^{2014}y_3^2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>a</td><td>Với $n, k \in G$, ta có $\begin{cases} n = 3a \\ k = 3b \end{cases} (a, b \in \mathbb{Z})$.
Khi đó $n \otimes k = n + k - 3 = 3a + 3b - 3 = 3(a + b - 1) \in G$.
Vậy $\otimes$ là phép toán hai ngôi trên G.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Tính kết hợp: $(n \otimes k) \otimes m = n \otimes (k \otimes m)$ vì :
$\begin{cases} (n \otimes k) \otimes m = (n + k - 3) \otimes m = (n + k - 3) + m - 3 \\ n \otimes (k \otimes m) = n \otimes (k + m - 3) = n + (k + m - 3) - 3 \end{cases}$
Tính giao hoán $n \otimes k = n + k - 3 = k + n - 3 = k \otimes n$
Phần tử trung hòa là $e = 3 \in G$, vì $n \otimes e = e \otimes n = 3 + n - 3 = n,\ \forall n \in G$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

		Với $n \in G$, phần tử nghịch đảo của n là $(6-n)$ vì $(6-n)\otimes n = n\otimes(6-n) = n+(6-n)-3 = 3 = e$ Vậy $(G,\otimes)$ là nhóm Abel.	**0,5**
	c	g đơn ánh vì $g(n) = g(m) \Leftrightarrow 3n+3 = 3m+3 \Leftrightarrow n = m$	**0,5**
		g là toàn ánh vì với $n = 3k \in G$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta có $g(k-1) = 3(k-1)+3 = 3k = n$. Vậy g là song ánh.	**0,5**
	d	Ta có $\begin{cases} g(m+n) = 3(m+n)+3 \\ g(m)\otimes g(n) = (3m+3)\otimes(3n+3) = (3m+3)+(3n+3)-3 \end{cases}$ Do đó $g(m+n) = g(m)\otimes g(n)$ $(\forall m,n \in \mathbb{Z})$ Vậy g là đồng cấu nhóm. Từ đó, kết hợp với câu c ta có g là đẳng cấu.	**1**
5	**a**	Vì $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ nên A là ma trận lũy đẳng.	**0,5**
		$\det A = 0$ nên ma trận A không khả nghịch.	**0,5**
	b	Vì $\begin{cases} A^2 = A \\ B^2 = B \\ AB = BA \end{cases}$ nên $(AB)^2 = (AB).(AB) = A(BA)B = A^2B^2 = AB$. Do đó AB là ma trận lũy đẳng.	**1**