ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN CAO CẤP A2
Mã môn học: 1001012
Ngày thi: 16/01/2015

ĐỀ

Câu I (3,5đ)

1. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, chứng minh tập $M=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-2x_2-x_3=0\}$ là một không gian con, tìm một cơ sở và số chiều của M.

2. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m: $\begin{cases} 2x+y-mz=m \\ x+my+3z=0 \\ 2x+(m+1)y=1 \end{cases}$.

Câu II (4đ)

Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(x;y;z)=(y+z;x-y),$$

$B=\{u_1=(1;1;1),u_2=(1;1;0),u_3=(1;0;0)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ và tập $\mathrm{E}=\{v_1=(1;0),v_2=(1;1)\}$.

1. Chứng minh E là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^2$.

2. Tìm ma trận của f đối với các cơ sở B, E.

3. Tìm một cơ sở và số chiều của $Kerf$.

4. Tìm một vectơ $u\in\mathbb{R}^3$ sao cho toạ độ của vectơ $f(u)$ đối với cơ sở E là $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Câu III (2,5đ)

Cho dạng toàn phương $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$.

1. Đưa dạng toàn phương $f(x_1,x_2,x_3)$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

2. Tìm hạng và xét dấu dạng toàn phương trên.

ĐÁP ÁN

Câu		Nội dung	Điểm
I	1	Với mọi $u=(x_1,x_2,x_3), v=(y_1,y_2,y_3)\in M$, $\alpha\in\mathbb{R}$, ta có: + $u+v=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$. Do $(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)-(x_3+y_3)=(x_1-2x_2-x_3)+(y_1-2y_2-y_3)=0$ nên $u+v\in M$.	0,5
		+ Với mọi $u=(x_1,x_2,x_3)\in M$, với mọi $\alpha\in R$ $\alpha u=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$. Do $(\alpha x_1)-2(\alpha x_2)-(\alpha x_3)=\alpha(x_1-2x_2-x_3)=0$ nên $\alpha u\in M$. Vậy M là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.	0,5
		$x_1-2x_2-x_3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2a+b\\ x_2=a\\ x_3=b\end{cases}\quad(a,b\in\mathbb{R})$. Một cơ sở của M: $\{(2,1,0),(1,0,1)\}$	0,25
		$\dim M=2$.	0,25
	2	$\mathrm{D}=m^2-7m, D_1=-2m^2-3m+3, D_2=5m-6, D_3=-m^2+3m-1$	1
		$m\neq 0\wedge m\neq 7$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{-2m^2-3m+3}{m^2-7m}, y=\dfrac{5m-6}{m^2-7m}, z=\dfrac{-m^2+3m-1}{m^2-7m}$.	0,5
		$m=0$, $\mathrm{D}_2=-6\neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.	0,25
		$m=7$, $\mathrm{D}_2=29\neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.	0,25
II	1	$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$,	0,5
		suy ra E độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$. Mà $\lvert E\rvert=\dim\mathbb{R}^2=2$ nên E là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.	0,5
	2	$f(u_1)=(2,0)$, suy ra $[f(u_1)]_E=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.	0,25
		$f(u_2)=(1,0)$, suy ra $[f(u_2)]_E=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,	0,25
		$f(u_3)=(0,1)$, suy ra $[f(u_3)]_E=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.	0,25
		$[f]_{B,E}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.	0,25

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td rowspan="4">3</td><td>$Kerf=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{cases}y+z=0\\x-y=0\end{cases}\right\}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}y+z=0\\x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-a\\x_2=-a\\x_3=a\end{cases}\quad(a\in\mathbb{R})$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Một cơ sở của Kerf: $\{(-1,-1,1)\}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\dim Kerf=1$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Gọi $u=(x,y,z)$ là vectơ cần tìm.
$\left[f(u)\right]_E=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, suy ra $f(u)=2v_1-v_2=(1,-1)$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Mặt khác, $f(u)=(y+z,x-y)$. Vậy
$(y+z,x-y)=(1,-1)\Leftrightarrow\begin{cases}y+z=1\\x-y=-1\end{cases}$.
Chọn u là một nghiệm của hệ trên, chẳng hạn $u=(-1,0,1)$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="7">III</td><td rowspan="6">1</td><td>Đa thức đặc trưng: $P_A(\lambda)=-\lambda^3+7\lambda^2-14\lambda+8$.
Giá trị riêng: $\lambda=1,\lambda=2,\lambda=4$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Với $\lambda=1$, VTR đltt: $\alpha_1=(1,1,1)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Với $\lambda=2$, VTR đltt: $\alpha_2=(-1,1,0)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Với $\lambda=4$, VTR đltt: $\alpha_3=(-1,-1,2)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Trực chuẩn:
$\beta_1=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right),\beta_2=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right),\beta_3=\left(\frac{-1}{\sqrt6},\frac{-1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6}\right)$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Đặt $P=\begin{pmatrix}1/\sqrt3&-1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&1/\sqrt2&-1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&2/\sqrt6\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$,
phép biến đổi trực giao $X=PY$ đưa f về dạng chính tắc
$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Do $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$ nên $r(f)=3$ và f xác định dương.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Chú thích: Các vectơ riêng độc lập tuyến tính có thể ghi dưới dạng cột.