ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

-----*-----

ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN CAO CẤP A1

Mã môn học: MATH130101

Ngày thi: 30/12/2014- Giờ thi: 9g45

ĐỀ THI:

Câu I (2,5đ)

1. Giải phương trình $z^{12} - z = 0$ trên $\mathbb{C}$.
2. Tìm m để hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{e^{2x} + m}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu II (2,5đ)

1. Tính đạo hàm của hàm $f(x) = \dfrac{(xe^x + 1)\ln x}{x + 4\arctan x}$ tại $x = 1$.
2. Cho hàm $f(x) = (x^2 + 1)(e^x - 1)$. Tính $f^{(2014)}(0)$.

Câu III (2,0đ)

1. Tính tích phân suy rộng $I = \int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}dx$.
2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int\limits_1^2 \dfrac{x + \ln x}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}dx$.

Câu IV (3,0 đ)

1. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n + 2^n}{(n-1)!}$.
2. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$.
3. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$ và được xác định bởi $f(x) = \begin{cases} 1 & khi\ 0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2} \\ -1 & khi\ \dfrac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$.

ĐÁP ÁN

Câu		Đáp án	Điểm
I (2,5đ)	1 (1,5đ)	$z^{12}-z=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z^{11}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=\sqrt[11]{1} \end{array}\right.$	0,5
		$1=\cos 0+i.\sin 0$	0,5
		$z=\sqrt[11]{1} \Leftrightarrow z=\cos\frac{k2\pi}{11}+i.\sin\frac{k2\pi}{11}$, với $k\in\mathbb{Z}$.	0,5
	2 (1đ)	$f(x)$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên tập xác định của nó. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow e^{2x}+m\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.	0,5
		$\Leftrightarrow m\geq 0$ (do $e^{2x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$).	0,5
II (2,5đ)	1 (1,25đ)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x.e^x+1).\ln x}{(x-1).(x+4\arctan x)}$	0,5
		$=\frac{e+1}{1+\pi} \Rightarrow f'(1)=\frac{e+1}{1+\pi}$.	0,75
	2 (1,25đ)	$f(x)=x^2.e^x+e^x-x^2-1$	0,25
		$=\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!}}_{(A)}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}}_{(B)}-x^2-1.$	0,5
		Xét chuỗi (A): $\frac{f^{(2014)}(0)x^{2014}}{2014!}=\frac{x^{n+2}}{n!}\Rightarrow n=2012$, cho nên $f^{(2014)}(0)=\frac{2014!}{2012!}=2013.2014$. Xét chuỗi (B): $\frac{f^{(2014)}(0)x^{2014}}{2014!}=\frac{x^n}{n!}\Rightarrow n=2014$, cho nên $f^{(2014)}(0)=1$. Vậy $f^{(2014)}(0)=2013.2014+1$.	0,5
III (2đ)	1 (1đ)	$I=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b x.e^{-2x}dx$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^{-2x}dx \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$.	0,25
		$I=\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}.x.e^{-2x}\Big\|_0^b-\int_0^b\frac{-1}{2}.e^{-2x}dx\right)$	0,25
		$=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2}.\frac{b}{e^{2b}}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big\|_0^b\right)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2}.\frac{b}{e^{2b}}-\frac{1}{4}\left(e^{-2b}-e^0\right)\right)=\frac{1}{4}$	0,5

	2 (1đ)	$f\left(x\right)=\dfrac{x+\ln x}{\sqrt{x^2-5x+6}}\geq 0, \forall x\in[1,2)$. Khi $x\to 2^-$: $\dfrac{x+\ln x}{\sqrt{x^2-5x+6}}=\dfrac{x+\ln x}{\sqrt{\left(2-x\right)\left(3-x\right)}}\sim\dfrac{2+\ln 2}{\sqrt{2-x}}$.	0,5
		Mà $\int_0^2\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ hội tụ (do $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$) nên tích phân suy rộng đề cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2.	0,5
IV (3đ)	1 (1đ)	Khi $n\to+\infty$, $\dfrac{3^n+2^n}{\left(n-1\right)!}\sim\dfrac{3^n}{\left(n-1\right)!}$	0,5
		Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{\left(n-1\right)!}$ hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alambert nên chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh 2.	0,5
	2 (1đ)	Bán kính hội tụ $R=1$, suy ra khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là (-1,1).	0,5
		Tại $x=1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}n^2$ phân kì vì không thỏa điều kiện cần để chuỗi hội tụ.	0,25
		Tại $x=-1$, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^n n^2$ phân kì vì không thỏa điều kiện cần để chuỗi hội tụ. Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa là (-1,1).	0,25
	3 (1đ)	$a_0=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{3\pi/2}dx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}-dx\right)=1$.	0,25
		$a_n=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{3\pi/2}\cos nxdx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}-\cos nxdx\right)=\dfrac{2}{n\pi}.\sin\dfrac{3n\pi}{2}$.	0,25
		$b_n=\dfrac{1}{\pi}\left(\int_0^{3\pi/2}\sin nxdx+\int_{3\pi/2}^{2\pi}-\sin nxdx\right)=\dfrac{2}{n\pi}\left(1-\cos\dfrac{3n\pi}{2}\right)$.	0,25
		Gọi $S\left(x\right)$ là chuỗi Fourier của $f\left(x\right)$, ta có : $S\left(x\right)=\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{3n\pi}{2}.\cos nx+\dfrac{2}{n\pi}\left(1-\cos\dfrac{3n\pi}{2}\right).\sin nx\right)$. Tại $x\neq k2\pi$ và $x\neq\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi$, $S\left(x\right)=f\left(x\right)$.	0,25