ĐÁP ÁN ĐỀ THI TOÁN A2

Mã môn học: MATH130201 Ngày thi: 09/08/2018

Câu		Nội dung	Điểm	Tổng
Câu 1	a.	Ba mặt phẳng $(P_1),(P_2),(P_3)$ chỉ có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} mx+2y+2z=-1 \\ 3x+5y+mz=2 \\ 7x+y-6z=4 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất, khi và chỉ khi ma trận hệ số của hệ, gọi là A, không suy biến.	**0.5**	**2.0**
		Ta có $A=\begin{bmatrix} m & 2 & 2 \\ 3 & 5 & m \\ 7 & 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\det(A)=-m^2-16m-28\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -2 \wedge m\neq -14.$	**0.5**	
	b.	Để ba mặt phẳng này có một đường thẳng chung, trước hết ta cần có hệ phương trình trên có vô số nghiệm, nghĩa là $\det(A)=0 \Leftrightarrow m=-2 \vee m=-14.$ Với $m=-14$: Ma trận bổ sung của hệ lúc này là : $\overline{A}=\begin{bmatrix} -14 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -14 & 2 \\ 7 & 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -76 & 0 & 38 & -9 \\ 0 & -76 & -190 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -216 \end{bmatrix}$. Hệ vô nghiệm.	**0.5**	
		Với $m=-2$, ma trận bổ sung của hệ lúc này là : $\overline{A}=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -16 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & -16 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/8 & 9/16 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ Nghiệm của hệ phương trình lúc này là $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9/16+7/8z \\ 1/16-1/8z \\ z \end{bmatrix}, z\in\mathbb{R}..$ Đây là trường hợp thỏa mãn yêu cầu bài toán, đường thẳng chung cần tìm có phương trình tham số là $x=9/16+7/8t, y=1/16-1/8t, z=t, t\in\mathbb{R}..$	**0.5**	
Câu 2	a.	Từ $(q(x))_B=(2,3,-1)$, suy ra $p(x)=-3p_1(x)+2p_2(x)+2p_3(x)$ $=-3(2+2x-x^2)+2(2+x-2x^2)+2(1+x-x^2)=-2x-3x^2.$	**1.0**	**3.0**
	b.	Giả sử $q(x)=5x^2-3=ap_1(x)+bp_2(x)+cp_3(x)$ $=a(2+2x-x^2)+b(2+x-2x^2)+c(1+x-x^2)$	**0.5**	

		$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+2b+c=-3\\ 2a+b+c=0\\ -a-2b-c=5\end{cases}.$ Giải ra ta được $a=2,b=-3,c=-1$. Vậy tọa độ của đa thức $q\left(x\right)=5x^2-3$ theo cơ sở B là $\left(q\left(x\right)\right)_B=\left(2,-3,-1\right)$.	**0.5**	
	c.	Do P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang S nên $\left[p\left(x\right)\right]_B=P\left[p\left(x\right)\right]_S \Leftrightarrow \left[p\left(x\right)\right]_S=P^{-1}\left[p\left(x\right)\right]_B$ $=\begin{bmatrix}1&0&2\\-2&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&1&-8\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-20\\2\end{bmatrix}.$ Vậy $\left(p\left(x\right)\right)_S=\left(-7,-20,2\right)$.	**1.0**	
Câu 3	a.	Với trị riêng 3 của A: $A-3I=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$	**0.5**	**3.0**
		Với giá trị riêng 5 của B : $B-5I=\begin{bmatrix}-2&-4&2\\-4&-8&4\\2&4&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$ Do đó $A-3I\sim B-5I$, vì thế không gian riêng của A và B ứng với giá trị riêng 3 là trùng nhau.	**0.5**	
	b.	Ta có: $A\mathbf{v}=\begin{bmatrix}4&2&-1\\2&7&-2\\-1&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\18\\-9\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=9\mathbf{v},$ Do đó, **v** là véctơ riêng của A ứng với giá trị riêng 9.	**0.5**	
		$B=\begin{bmatrix}3&-4&2\\-4&-3&4\\2&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\\-14\\7\end{bmatrix}=-7\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=-7\mathbf{v}.$ Như vậy, **v** cũng là véctơ riêng của B ứng với giá trị riêng -7.	**0.5**	
	c.	Từ Ý 1 ta có $A-3I=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$ $\left(A-3I\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow x_1+2x_2-x_3=0\Leftrightarrow x_1=-2x_2+x_3;x_2,x_3\in\mathbb{R}.$ Không gian riêng của A tương ứng với giá trị riêng 3 là	**0.5**	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

$\left(A-3I\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow x_1+2x_2-x_3=0\Leftrightarrow x_1=-2x_2+x_3; x_2,x_3\in\mathbb{R}.$

$\mathrm{N}_A\left(3\right)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid x_2,x_3\in\mathbb{R}, x_1=-2x_2+x_3\right\}$ Đặt

$$=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\right\}.$$

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2-\frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{-2}{5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\2/5\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}.$$

Ta được $\left\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\right\}$ là một cơ sở trực giao của $N_A\left(3\right)$, chuẩn hóa họ này ta được $\left\{\mathbf{u}_1^0=\frac{1}{\left\|\mathbf{u}_1\right\|}\mathbf{u}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{u}_2^0=\frac{1}{\left\|\mathbf{u}_2\right\|}\mathbf{u}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $N_A\left(3\right)$.

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

Chuẩn hóa $\mathbf{v}$ ta được $\mathbf{v}^0=\frac{1}{\left\|\mathbf{v}\right\|}\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\left\{\mathbf{v}^0\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian riêng của A ứng với giá trị riêng 9.

Đặt $P=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^0 & \mathbf{u}_2^0 & \mathbf{v}^0\end{bmatrix}, D=\mathrm{diag}\left(3,3,9\right), \mathbf{x}=P\mathbf{y}, \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{bmatrix}^T\in\mathbb{R}^3$, khi đó ta có

$$Q\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{y}^TD\mathbf{y}=3y_1^2+3y_2^2+9y_3^2.$$

</td><td>0.5</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Câu 4</td><td rowspan="2">1.</td><td>

Đặt $F\left(x,y,z\right)=x^3z+xy^2+yz^3-8$, ta có $z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}, z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}.$

$F\left(x,y,z\right)=x^3z+xy^2+yz^3-8$

$F'_x=3x^2z+y^2, F'_y=2xy+z^3, F'_z=x^3+3yz^2.$

</td><td>0.5</td><td rowspan="3">2.0</td></tr>
<tr><td>

Thay $x=0,y=1$ vào phương trình $x^3z+xy^2+yz^3=8$ ta được $z=2$. Từ đó ta có

$$z'_x\left(0,1\right)=-\frac{F'_x\left(0,1,2\right)}{F'_z\left(0,1,2\right)}=-\frac{1}{12}, z'_y\left(0,1\right)=-\frac{F'_y\left(0,1,2\right)}{F'_z\left(0,1,2\right)}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3}.$$

Vậy $dz\left(0,1\right)=z'_x\left(0,1\right)dx+z'_y\left(0,1\right)dy=-\frac{dx}{12}-\frac{2dy}{3}.$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

Từ $z\left(x,y\right)=x^2\left(2y-1\right)-2y\left(y^2+1\right)$, ta có

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

		$z_x{}' = 2x(2y-1)$, $z_y{}' = 2x^2y - 6y^2 - 2.$ Giải hệ: $\begin{cases} z_x{}' = 0 \\ z_y{}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2y-1) = 0 \\ 2x^2y - 6y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee y = 1/2 \\ 2x^2y - 6y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$ Giải ra ta được hai điểm dừng $M_1\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right), M_2\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$.		
		Các đạo hàm riêng cấp hai $z''_{xx} = 2(2y-1), z''_{xy} = 4x, z''_{yy} = 2x^2 - 12y.$. Lập bảng xét dấu tại các điểm dừng:	**0.5**	

Điểm dừng	$A = z''_{xx}(M)$	$B = z''_{xy}(M)$	$C = f''_{yy}(M)$	Δ $(AC - B^2)$	Kết luận
M_1	0	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	1	-7/2	Không đạt cực trị
M_2	0	$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	1	-7/2	Không đạt cực trị

Vậy hàm số không có cực trị

Tổng	**10.0**