

Câu 1: (2 điểm)

a/ Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho ba mặt phẳng $(P_1), (P_2), (P_3)$ lần lượt có các phương trình như sau (với m là tham số):

$$(P_1): 2x + (m-1)y + 4z = 3,$$

$$(P_2): (2m+1)x + 2y - z = 2m - 3,$$

$$(P_3): (m+1)x + y - 5z = -2.$$

Tìm m để ba mặt phẳng này có duy nhất một điểm chung (tức là ba mặt phẳng cắt nhau tại một điểm duy nhất).

b/ Tính $\det(A^{15} \cdot (A^T)^{16} + 3 \cdot (A^T)^{21} \cdot A^{10})$, biết $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Câu 2: (2,5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f: P_2[x] \rightarrow P_2[x]$ được xác định bởi

$$f(ax^2 + bx + c) = (b-3c) \cdot x^2 + (a+b+2c) \cdot x + (a+2b-c).$$

Gọi $E = \{v_1 = 2x^2 - x + 3, v_2 = -x^2 + 1, v_3 = x^2 - 2x + m\}$ là một tập hợp của $P_2[x]$, và B là cơ sở chính tắc của $P_2[x]$.

a/ Tìm m để E là cơ sở của $P_2[x]$.

b/ Tìm một cơ sở và số chiều của $\ker f$ (với $\ker f$ là nhân của ánh xạ tuyến tính f).

c/ Với $m = 1$, hãy tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B.

Câu 3: (2,5 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ và $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

a/ Tìm tất cả các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A.

b/ Đưa dạng toàn phương $f(x_1, x_2, x_3) = X^T \cdot A \cdot X$ về dạng chính tắc bằng phép biến đổi trực giao.

Câu 4: (3 điểm) Cho ánh xạ $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow G$ xác định bởi $g(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$,

với \mathbb{R}^+ là tập hợp các số thực dương và tập $G = \left\{ u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$.

a/ Chứng minh phép nhân các ma trận là một phép toán hai ngôi trên G .

b/ Chứng minh G cùng với phép nhân ma trận là một nhóm Abel (nhóm Abel là nhóm giao hoán).

c/ Chứng minh g là một đồng cấu từ nhóm (\mathbb{R}^+, \cdot) (nhóm các số thực dương \mathbb{R}^+ với phép nhân các số thực) vào nhóm (G, \cdot) (nhóm G cùng với phép nhân ma trận).

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	Nội dung kiểm tra
[CĐR G2.3]: Thực hiện được các phép toán ma trận, tính được định thức, các phép biến đổi sơ cấp, tìm hạng ma trận, tìm được ma trận nghịch đảo, giải được hệ phương trình tuyến tính.	Câu 1
[CĐR G2.4]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về không gian vectơ, không gian Euclide như: chứng minh không gian con; xác định một vectơ có là tổ hợp tuyến tính của một hệ vectơ; xét tính độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ; tìm cơ sở, số chiều của một không gian vectơ; tìm tọa độ của một vectơ đối với một cơ sở, tìm ma trận đổi cơ sở; phương pháp Gram-Schmidt để xây dựng hệ vectơ trực giao từ một hệ vectơ độc lập tuyến tính,... [CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về ánh xạ tuyến tính: tìm nhân, ảnh, ma trận, hạng của ánh xạ tuyến tính;	Câu 2
[CĐR G2.5]: Thực hiện được hầu hết các bài toán về dạng toàn phương: tìm trị riêng, vectơ riêng, chéo hóa ma trận; xét dấu dạng toàn phương.	Câu 3
[CĐR G1.6]: Trình bày được khái niệm phép toán hai ngôi, nhóm, vành, trường, đồng cấu, đẳng cấu. [CĐR G2.6]: Xây dựng phép toán hai ngôi; xét xem tập hợp với phép toán hai ngôi cho trước có là nhóm, vành, trường hay không; mã hóa, phát hiện lỗi, sửa sai,...	Câu 4

Ngày tháng 08 năm 2015

Thông qua bộ môn
(ký và ghi rõ họ tên)