

Câu I (2,5 điểm)

1. Tính tích phân đường loại một $I = \int_L (x+2y)dl$, với L là nửa đường tròn

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Tính diện tích phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm giữa hai mặt phẳng $z = 0$ và $z = 1$.

Câu II (3 điểm)

1. Chứng minh tích phân đường loại hai

;

$$\int_C (2xy \, dx - x \, dy)$$

;

không phụ thuộc vào đường lấy tích phân và tính tích phân này.

2. Xác định cận của tích phân bội ba

$$\int \int \int x, y, z \, dx dy dz$$

trong hệ tọa độ Đềcát, hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu. Trong đó là miền giới

hạn bởi mặt phẳng $z = 1$ và phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$,
 $z \geq 0$.

Câu III (4,5 điểm) Giải các phương trình vi phân sau.

1. $y \cot x - y = 1$.

2. $x^2 y \, dx - xy \, dy = 0$.

3. $y^2 - 2y - 3y - 3x = 0$.

4. $y^2 - 2y - y = 0$; $y^2 = 1$; $y^2 = 2$.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bộ môn duyệt

Bi 1: (2,5 điểm)

1. Dùng tích phân đường loại I để chứng minh công thức tính chu vi hình tròn bán kính R bằng $2\pi R$.

Xét đường tròn (C) tâm O bán kính R có chu vi l

$$d =$$

Ta có phương trình tham số của (C) là

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

2. Tính diện tích phần mặt cầu giới hạn bởi mặt phẳng $z = 1$.

$$d =$$

$$d = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Bi 2: (3 điểm)

1. Chứng minh tích phân đường loại I của hàm số $f(x, y) = 2xy$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân và tính tích phân này

$$\int_C 2xy dx - x dy.$$

$$f_x = 2y, \quad f_y = 2x.$$

$$f_x = f_y \Rightarrow$$

$\int_C 2xy dx - x dy$ tích I không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

Tồn tại $(x, y) = (2, 2)$ thỏa mãn $d = 1$.
 Vậy $(x, y) = (1, 1)$.

2. Xác định cận tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề các, hệ tọa độ trụ và hệ tọa độ cầu:

$$x, y, z \quad dx dy dz;$$

trong đó l miền thể tích giới hạn bởi phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; mặt phẳng $z = 1$.

Toạ độ Đề các

$$dx \sqrt{\quad} dy \sqrt{\quad} dz.$$

Toa độ trụ

$$\int_0^{\delta} dr \int_0^{\delta} r dz.$$

Toa độ cầu

$$\int_0^{\delta} dr \int_0^{\delta} r \sin \theta d\theta.$$

Bi 3: (4,5 điểm) Giải các phương trình vi phân sau:

1. $y' + x y = 1$ — —.

2. $x y' + x y dy = 0$.

Đặt $y = x^d$. Phương trình đ cho tương đương
 $x^d dx + x^d dx = 0 \Rightarrow d x^d = 0 \Rightarrow d = 0$

3. $y' + 2y = 3x$.

Phương trình thuần nhất tương ứng có 2 nghiệm phân biệt 1; 3.
 Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất dạng

Thế vào phương trình ta có $1; x^5_6$.

Phương trình nghiệm tổng quát

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x^5_6$$

4. $y' + 2y = y^2$ 0; $y^2 = 1$; $y^2 = 2$.

Phương trình nghiệm tổng quát

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2$$

Thay điều kiện $y^2 = 1$; $y^2 = 2$ ta có

$$\begin{cases} 1 - 2C_1 + C_2^2 = 1 \\ 1 - 3C_1 + C_2^2 = 2 \end{cases}$$

Nghiệm riêng cần tìm là x .