

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I			2,0
1		Ma trận bổ sung của hệ đã cho	0,5
		$\left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 6 & -9 \end{array} \right).$	
2		Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận	0,75
		$\begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{(-2)d_1 \rightarrow d_2 \\ (-2)d_1 \rightarrow d_3 \\ d_1 \rightarrow d_4}} \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow{3d_2 \rightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 27 & 29 & -19 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{8}d_3} \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 27 & 29 & -19 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow{(-27)d_3 \rightarrow d_4} \left(\begin{array}{cccc c} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right).$	
3		Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ	0,75
		$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_2 + 10x_3 + 9x_4 = -5 \\ x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_4 = 8 \end{cases}.$ <p>Hệ phương trình có nghiệm duy nhất :</p> $(x_1 = 19, x_2 = -9, x_3 = -5, x_4 = 4).$	
II			2,0
1		Từ 3 vectơ u_1, u_2, u_3 , lập định thức	0,5
		$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & m & -3 \end{vmatrix}.$	
2		Tính định thức	1,0
		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & m & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)d_1 \rightarrow d_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & m+2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ m+2 & -6 \end{vmatrix} = 3m.$	

	2	Điều kiện để hệ \mathcal{U} phụ thuộc tuyến tính	0,5
		Hệ \mathcal{U} phụ thuộc tuyến tính khi $D = 0$, khi và chỉ khi $m = 0$.	
III			3,0
	1.	Chéo hóa ma trận B	2,0
		<p>Đa thức đặc trưng:</p> $\begin{vmatrix} 5-k & 4 & 6 \\ 4 & 5-k & 6 \\ -4 & -4 & -5-k \end{vmatrix} = -(k-1)^2(k-3).$ <p>Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm phân biệt $k = 1$ (bội hai) và $k = 3$.</p>	0,5
		<p>Với $k = 1$, ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$ <p>Giải hệ ta tìm được hệ nghiệm cơ bản là $\gamma_1 = (-1, 1, 0)$, $\gamma_2 = (-3, 0, 2)$.</p>	0,5
		<p>Với $k = 3$, ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$ <p>Giải hệ ta được một nghiệm cơ bản là $\gamma_3 = (1, 1, -1)$.</p>	0,5
		<p>Ma trận chéo hóa cần tìm</p> $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$	0,5
	2.		1,0
		<p>Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Ta có</p> $\begin{cases} \gamma_1 = -e_1 + e_2 \\ \gamma_2 = -3e_1 + 2e_3 \\ \gamma_3 = e_1 + e_2 - e_3 \end{cases}.$ <p>Khi đó ma trận</p> $T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ <p>làm chéo hóa ma trận B.</p>	1,0

IV			1,0
	1	Tính $y'(x)$	0,5
		<p>Ta có phương trình tương đương</p> $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - a \cdot \arctg \frac{y}{x} = 0.$ <p>Khi đó</p> $y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} = -\frac{\frac{x}{x^2 + y^2} + a \frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{y}{x^2 + y^2} - a \frac{x}{x^2 + y^2}} = \frac{x + ay}{ax - y}.$	
1	Tính $y''(x)$	0,5	
		$y'' = \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial y'}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{ax - y - a(x + ay)}{(ax - y)^2} + \frac{a(ax - y) + x + ay}{(ax - y)^2} \cdot \frac{x + ay}{ax - y}$ $= \frac{(a^2 + 1)(x^2 + y^2)}{(ax - y)^3}.$	
V			2,0
	1	Tìm các điểm tới hạn	0,5
		<p>Hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$ xác định với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ta có</p> $z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x.$ <p>Từ hệ phương trình</p> $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases},$ <p>ta tìm được hai điểm tới hạn là $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.</p>	
2	Tính các đạo hàm cấp hai	0,5	
		<p>Ta có</p> $z''_x = 6x, \quad z''_{xy} = -3, \quad z''_{y^2} = 6y.$ <p>Do đó $\Delta(x, y) = 9 - 36xy$.</p>	
3	Kết luận	1,0	
		<p>Tại $M_1(0, 0)$ ta có $s^2 - rt = 9 > 0$. Vậy $M_1(0, 0)$ không là điểm cực trị.</p> <p>Tại $M_2(1, 1)$ ta có $s^2 - rt = -27 < 0$, $z''_x(1, 1) = 6 > 0$, Vậy $M_2(1, 1)$ là điểm cực tiểu của hàm z, và $Z_{min} = -1$.</p>	