ĐÁP ÁN TOÁN CAO CẤP A2

Mã môn học: MATH130201

Ngày thi: 18/06/2018

<table>
<tr><th>Câu</th><th></th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td>2,00</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">a</td><td>$\det A = -m^2 + 5m - 6$.
$r(A) = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3 \wedge m \neq 2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Khi $m \neq 3$ và $m \neq 2$, hệ phương trình $\left[\begin{array}{ccc|c} m-1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & m \\ 0 & -m & 6 & 2 \end{array}\right]$ (*) có nghiệm duy nhất nên (P_1), (P_2), (P_3) cắt nhau tại 1 điểm.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>(P_1), (P_2), (P_3) có một đường thẳng chung, suy ra (*) có vô số nghiệm, suy ra $\det A = 0$, tức là m =3 hoặc m =2.
Thay m = 3 vào (*), ta được hệ phương trình vô nghiệm.</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>Thay m =2 vào (*) ta được hệ phương trình có vô số nghiệm:
$(3-2t, -1+3t, t)$.
Vậy với m =2 (P_1), (P_2), (P_3) có một đường thẳng chung là (d):
$x = 3-2t,\ y = -1+3t,\ z = t$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td>2,00</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">a</td><td>Xét phương trình: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$. Phương trình này tương đương với hệ phương trình:
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$, có nghiệm duy nhất $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
Do đó, E là hệ độc lập tuyến tính trong $P_2[x]$.
Mặt khác, $|E| = 3 = \dim P_2[x]$.
Vậy E là một cơ sở của $P_2[x]$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$h = 1.v_1 + 2.v_2 - v_3 = -3x - 4x^2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>Vì $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ nên $0 + 0x + 0x^2 \in W$. Do đó $W \neq \varnothing$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Lấy $u = a + bx + cx^2$, $v = a' + b'x + c'x^2 \in W$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ bất kì.
Do $u, v \in W$ nên $\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ và $\begin{vmatrix} a' & b' \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
Do $\alpha u = \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2$ thỏa $\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ nên $\alpha u \in W$.</td><td>0,75</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Do $u+v=(a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2$ thỏa
$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ nên $u+v\in W$.
Vậy $W \le P_2[x]$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c</td><td>$P_{B\to E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td>2,50</td></tr>
<tr><td></td><td>a</td><td>Đa thức đặc trưng: $P_A(\lambda)=-\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36$.
$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=6,3,2$.
Ma trận A có 3 giá trị riêng: $\lambda=6,3,2$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Với $\lambda=6$, VTR độc lập tuyến tính $\alpha_1=\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Với $\lambda=3$, VTR độc lập tuyến tính tương ứng $\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Với $\lambda=2$, VTR độc lập tuyến tính tương ứng $\alpha_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Trực chuẩn hóa:
$\beta_1=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $\beta_3=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Đặt $P=\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$, ta có P trực giao và
$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>b</td><td>Đặt $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, phép biến đổi trực giao $X=PY$ đưa Q về dạng chính tắc $Q(y)=6y_1^2+3y_2^2+2y_3^2$.
Do $\lambda_1=6>0,\ \lambda_2=3>0,\ \lambda_3=2>0$ nên Q xác định dương.</td><td>1</td></tr>
</table>

4			**2,50**
	a	Đặt $F = 2x^3z + xy^2e^z + z - y^2 + x$; $F'_x = 6x^2z + y^2e^z + 1$; $F'_y = 2xye^z - 2y$; $F'_z = 2x^3 + xy^2e^z + 1$. $z'_x = -\dfrac{6x^2z + y^2e^z + 1}{2x^3 + xy^2e^z + 1}$; $z'_y = -\dfrac{2xye^z - 2y}{2x^3 + xy^2e^z + 1}$	**0,5**
		Tại (0,1), ta có $z = 1$ nên $z'_x(0,1) = -(e+1)$, $z'_y(0,1) = 2$. Ta có $dz(0,1) = -(e+1)dx + 2dy$.	**0,5**
	b	Ta có $\begin{cases} z'_x = 6x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ z'_y = 4xy - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{6} \\ y = 0 \end{cases}$. Hàm z có 2 điểm dừng: $M_1\left(1/\sqrt{6};0\right), M_2\left(-1/\sqrt{6};0\right)$.	**0,5**
		$A = z''_{xx} = 12x$; $B = z''_{xy} = 4y$; $C = z''_{yy} = 4x - 2$; $\Delta = AC - B^2 = 12x(4x-2) - 16y^2$.	**0,25**
		Tại $M_1\left(1/\sqrt{6};0\right)$, do $\Delta = \dfrac{12}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{4}{\sqrt{6}} - 2\right) < 0$ nên hàm z không đạt cực trị tại M_1. Tại $M_2\left(-1/\sqrt{6};0\right)$, do $\Delta = \dfrac{-12}{\sqrt{6}}\left(\dfrac{-4}{\sqrt{6}} - 2\right) > 0$; $A = \dfrac{-12}{\sqrt{6}} < 0$ nên z đạt cực đại tại M_2.	**0,75**