Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng
Bộ môn Toán

ĐÁP ÁN MÔN ĐẠI SỐ

Ngày thi: 01/06/2017

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
C. 1	1	$B^TB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\left(B^TB\right) = 18.$	0.5
		$AB = \begin{bmatrix} a & 6-a \\ 8-a & 7+a \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{9}\det\left(B^TB\right)AB = \frac{1}{9}.18.\begin{bmatrix} a & 6-a \\ 8-a & 7+a \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ $= 2.\begin{bmatrix} a & 6-a \\ 8-a & 7+a \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 12-2a \\ 16-2a & 14+2a \\ 10 & -4 \end{bmatrix}.$	0.5
	2	Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det\left(A\right) = 14 - 13t - a^2 \neq 0.$	0.5
		Giải ra ta được điều kiện để A khả nghịch là $a \neq 1 \wedge a \neq -14.$	0.5
C. 2	1	$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$	0.5
		Do đó $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 8 \\ -3 & -2 & 1 & 6 & -12 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU.$	0.5
	2	Theo ý 1, các cột 1, 2 và 4 là các cột cơ sở của A. Nếu đặt $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$ thì $\left\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\right\}$ là một cơ sở của $\operatorname{Col} A$ và $\dim \operatorname{Col} A = 3$.	0.5
		Ta có $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ Vậy $\operatorname{Nul} A = \left\{\begin{bmatrix} -x_3 - 6x_5 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{bmatrix}\right\} = \left\{x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{x_3\mathbf{b}_1 + x_5\mathbf{b}_2\right\}, x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$ Do đó $\dim \operatorname{Nul} A = 2$ và một cơ sở là $\left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\right\}$ tìm được ở trên.	0.5
C. 3	1	$S = \left\{\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$	0.5

		Tính các tích chấm ta có $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 4 \neq 0$ do đó họ véctơ đã cho không là một họ trực giao.	
	2	Đặt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$ $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$	**0.5**
		$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T - \dfrac{4}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\dfrac{4}{9} & -\dfrac{1}{9} & 2 & \dfrac{1}{9} \end{bmatrix}^T$ Để đơn giản trong tính toán, ta chọn lại $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -18 & -1 \end{bmatrix}$. Đặt $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \dfrac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2$	**0.5**
		$= \left(-1, 1, -1, 1\right) - \dfrac{-1}{9}\left(1, -2, 0, 2\right) - \dfrac{14}{342}\left(4, 1, -18, -1\right)$ $= \left(-\dfrac{20}{19}, \dfrac{14}{19}, -\dfrac{5}{19}, \dfrac{24}{19}\right)$. Chọn lại $\mathbf{u}_3 = \left(-20, 14, -5, 24\right)$. Khi đó, họ véctơ $\left\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\right\}$ là họ trực giao cần tìm.	**0.5**
	3	Sử dụng cơ sở trực giao của *W* tìm được trong 2, ta có : $\operatorname{Proj}_W\left(\mathbf{v}\right) = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3$	**0.5**
		$= \left(\dfrac{11}{9}, -\dfrac{22}{9}, 0, \dfrac{22}{9}\right) + \left(-\dfrac{74}{171}, -\dfrac{37}{342}, \dfrac{37}{19}, \dfrac{37}{342}\right) + \left(-\dfrac{1040}{1197}, \dfrac{104}{171}, -\dfrac{260}{1197}, \dfrac{416}{399}\right)$ $= \left(-\dfrac{5}{63}, -\dfrac{35}{18}, \dfrac{109}{63}, \dfrac{151}{42}\right)$.	**0.5**
C. 4		$Q\left(\mathbf{x}\right) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ Ma trận biểu diễn của dạng toàn phương là $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -3 \\ -6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng của *A* là $\det\left(A - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 23\lambda^2 - 126\lambda = 0$. Giải ra ta được các trị riêng của *A* là 0, 9 và 14.	**0.5**
		Với $\lambda = 0$, giải phương trình $\left(A - 0I\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hay $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là $N_A\left(0\right) = \left\{t\left(3, 2, 1\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\mathbf{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Với $\lambda = 9$, giải phương trình $\left(A - 9I\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là $N_A\left(9\right) = \left\{t\left(0, -1, 2\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t\mathbf{v}_2 \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Với $\lambda = 14$, giải phương trình $\left(A - 14I\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ta được không gian riêng tương ứng là	**0.5**

		$N_A(14)=\left\{t\left(-5,6,3\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\mathbf{v}_3\mid t\in\mathbb{R}\right\}$.	
		Vậy một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ gồm các véctơ riêng của A là $\left\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\right\}$. Cơ sở trực chuẩn tương ứng là $\left\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{bmatrix}-5\\6\\3\end{bmatrix}\right\}$.	**0.5**
		Đặt $P=\left[[\mathbf{u}_1]\quad[\mathbf{u}_2]\quad[\mathbf{u}_3]\right]$ thì P là ma trận trực giao, $D=\mathrm{diag}\left(0,9,14\right)$. Đổi biến $[\mathbf{x}]=P[\mathbf{y}],\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\mathbf{y}=\left(y_1,y_2,y_3\right)\in\mathbb{R}^3$. Khi đó $Q_2\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathbf{y}^TD\mathbf{y}=9y_2^2+14y_3^2$.	**0.5**
C. 5		Trong $\mathbb{Z}_{29}$, $K^{-1}=\begin{bmatrix}4&5\\13&17\end{bmatrix}^{-1}=\left(\det(K)\right)^{-1}\begin{bmatrix}17&-5\\-13&4\end{bmatrix}$ $=3^{-1}\begin{bmatrix}17&24\\16&4\end{bmatrix}=10.\begin{bmatrix}17&24\\16&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&8\\15&11\end{bmatrix}$.	**0.5**
		BÊX CEI = BÊ + XC + EI (B,Ê) $\equiv\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}25&8\\15&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23\\17\end{bmatrix}\equiv$ (T,Ô) (X,C) $\equiv\begin{bmatrix}27\\4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}25&8\\15&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}27\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\14\end{bmatrix}\equiv$ (I,M) (E,I) $\equiv\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}25&8\\15&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\23\end{bmatrix}\equiv$ (Â,T) Vậy chữ cần tìm là TỐI MẬT.	**0.5**
Tổng điểm			**10.0**