TRƯỜNG ĐẠI HỌC SPKT TP. HỒ CHÍ MINH
BỘ MÔN TOÁN-KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN-HK1.2018-2019
Môn: Đại số tuyến tính & Cấu trúc đại số
Thời gian: 90 phút (không tính thời gian phát đề).

Câu		Nội dung đáp án (tóm tắt)	Điểm	Ghi chú
1 (2đ)	a	Với mọi $A,B\in GL_n(\mathbb{R})$, ta có $A.B\in M_n(\mathbb{R})$ và $\det A\neq 0, \det B\neq 0$. Do đó $\det(A.B)=\det A.\det B\neq 0$. Từ đó suy ra $A.B\in GL_n(\mathbb{R})$.	0.5	
	b	Theo tính chất của các phép toán trên $M_n(\mathbb{R})$, ta thấy rằng: • Phép nhân ma trận có tính chất kết hợp, tức là: với mọi $A,B,C\in GL_n(\mathbb{R})$, ta có $(A.B).C=A.(B.C)$	0.25	
		• Tồn tại phần tử đơn vị $e=I_n\in GL_n(\mathbb{R})$ thỏa $A.I_n=I_n.A=A$, với mọi $A\in GL_n(\mathbb{R})$.	0.25	
		• Với mọi $A\in GL_n(\mathbb{R})$, tồn tại phần tử nghịch đảo $N=A^{-1}\in GL_n(\mathbb{R}): A.N=N.A=I_n$ (do $\det A\neq 0$)	0.25	
		• Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán ($A.B\neq B.A$) Vậy $(GL_n(\mathbb{R}),\cdot)$ là một nhóm không giao hoán	0.25	
	c	Ta có $\varnothing\neq SL_n(\mathbb{R})\subseteq GL_n(\mathbb{R})$, (dễ thấy $I_n\in SL_n(\mathbb{R})$) Với mọi $A,B\in SL_n(\mathbb{R})$, ta có $A.B^{-1}\in SL_n(\mathbb{R})$, (vì $\det A=\det B=1\Rightarrow \det B^{-1}=1$ và $\det(A.B^{-1})=1$).	0.5	
2 (4đ)	a	$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=5x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-6x_1x_2$	0.5	
		Trị riêng: $\lambda=8\vee\lambda=2$ (bội 2)	0.5	
		Giải hệ $(A-\lambda I_3)X=0$ ta được • $V_{\lambda=8}=Span\left\{X_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Chọn $\{X_1\}$ là hệ VTR cơ sở của $V_{\lambda=8}$. Đặt $Y_1=\dfrac{X_1}{\lVert X_1\rVert}=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$	0.5	

		• $V_{\lambda=2} = Span\left\{X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Chọn $\{X_2, X_3\}$ là hệ VTR cơ sở của $V_{\lambda=2}$. (Lưu ý: $\{X_2, X_3\}$ là hệ trực giao.) Đặt $Y_2 = \frac{X_2}{\lVert X_2\rVert} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}, Y_3 = \frac{X_3}{\lVert X_3\rVert} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	**0.5**	
		$P = (Y_1Y_2Y_3)$ là ma trận trực giao và $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}8&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Vậy, phép đổi biến $X = PY = P.\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ đưa $f(x_1, x_2, x_3)$ về dạng chính tắc $f_{CT}(y_1, y_2, y_3) = 8y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$.	**0.5**	
	b	Theo câu a) ta có $P^{-1}AP = D$ suy ra $A^{2018} = PD^{2018}P^{-1}$. Hay $P^{-1}A^{2018}P = D^{2018} = \begin{pmatrix}8^{2018}&0&0\\0&2^{2018}&0\\0&0&2^{2018}\end{pmatrix}$. Chứng tỏ A^{2018} được chéo hóa trực giao bởi P. Vậy phép đổi biến $X = PZ = P.\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$ đưa $F(x_1, x_2, x_3)$ về dạng chính tắc $F_{CT}(z_1, z_2, z_3) = 8^{2018}z_1^2 + 2^{2018}z_2^2 + 2^{2018}z_3^2$.	**0.5**	
	c	$\det(A^{2018}) = (\det A)^{2018} = 32^{2018}$	**0.5**	
	d	$\dim RowA = 3$ và hệ $\{row_1A;\ row_2A;\ row_3A\}$ là một cơ sở của RowA (vì $\det A \neq 0$).	**0.5**	
3 **(4đ)**	**a**	• C/m: F là tập ĐLTT trên $P_2[x]$ (vì $\begin{vmatrix}1&1&0\\3&-1&2\\-1&3&1\end{vmatrix} = -12 \neq 0$)	**0.5**	
		• $\dim P_2[x] = 3 = \lvert F\rvert$ (Hoặc chứng minh F là một tập sinh của $P_2[x]$)	**0.5**	
		• $[u_4]_F = \begin{pmatrix}-1/4\\5/4\\3/2\end{pmatrix}$	**0.5**	
	b	• $\varnothing \neq P_1[x] \subseteq P_2[x]$	**0.5**	
		• $P_1[x]$ là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ (Hoặc kiểm tra 2 tiên đề về kgvt con)	**0.5**	
	c	• $Ker\varphi = \{u = a + bx \in P_1[x] / \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\} = \{0_{P_1[x]}\}$ và $\dim Ker\varphi = 0$.	**1.0**	

		• $v = a + bx \in P_1[x],\ \left[\varphi(v)\right]_B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi(v) = 7b_1 + 3b_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 103/7 \\ b = 3/7 \end{cases}$	**0.5**	