Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
Khoa Khoa học ứng dụng
Bộ môn Toán

ĐÁP ÁN MÔN ĐẠI SỐ

Ngày thi: 22/12/2017

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
C. 1	**a**	$\det(A) = 25, \det(5A^8) = 5^3(\det(A))^8 = 5^3 25^8 = 5^{19}. BC = \begin{bmatrix} 2a & -a^2 & a^2 \\ 8 & -4a & 4a \\ 6 & -3a & 3a \end{bmatrix}, \det(BC) = 0.$	**0.5**
		$CAB = (CA)B = [6-2a \quad 4-3a \quad 5a]\begin{bmatrix} a \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = [-2a^2+9a+16],$ $\det(CAB) = -2a^2+9a+16.$	**0.5**
	b	$\det(A-\lambda I) = (5-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2(1-\lambda),$ $\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 5.$ Với $\lambda = 1$: $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$ Vậy không gian riêng của A ứng với trị riêng 1 là $N_A(1) = \text{Span}\{[1 \quad -1 \quad 0]^T\}$ và một cơ sở là $\{\mathbf{e}_1 = [1 \quad -1 \quad 0]^T\}$	**0.5**
		Với $\lambda = 5$: $A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, k, l \in \mathbb{R}.$ Vậy không gian riêng của A ứng với trị riêng 5 là $N_A(5) =$ $\text{Span}\{[1 \quad 1 \quad 0]^T, [0 \quad 0 \quad 1]^T\}$ và một cơ sở là $\{\mathbf{e}_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^T, \mathbf{e}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T\}$	**0.5**
	c	Đặt $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$ **thì** $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ gồm các véc tơ riêng của A.	**0.5**
		Đặt $P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$ và $D = \text{diag}(1,5,5)$. Khi đó P là một ma trận trực giao và phép đổi biến $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ là phép biến đổi trực giao để đưa dạng toàn phương Q về dạng chính tắc: $Q(x) = x^TAx = y^TDy = y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2.$	**0.5**
C. 2	**a**	Đặt $H = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]$. Ta có $\det(H) = -2 \neq 0$ nên họ các véc tơ cột của H là độc lập tuyến tính, nghĩa là họ véc tơ $F = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ là độc lập tuyến tính. Từ $\mathbb{R}^3$là không gian ba chiều và F có ba véc tơ ta suy ra rằng F là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.	**0.5**
		Giả sử $\mathbf{u}_4 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3$. Phương trình véc tơ này tương đương với hệ phương trình tuyến tính có ma trận bổ sung $[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4]$. Giải hệ này ta được $a = 20, b = \frac{9}{2}, c = \frac{29}{2}$. Vậy tọa độ của véc tơ $\mathbf{u}_4$ theo cơ sở F là $[\mathbf{u}_4]_F = \left[20 \quad \frac{9}{2} \quad \frac{29}{2}\right]^T$.	**0.5**
	b	Ta có $W = \left\{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a + 2b - 3c = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} -2b+3c \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}\right\} = \text{Span}\left\{\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Dễ thấy, họ véc tơ $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ là một hệ sinh độc lập tuyến tính của W. Vậy B là một cơ sở của W và $\dim W = 2$.	**1.0**
	c	Do $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ là một cơ sở của W nên $W^\perp = \{\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \perp W\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \perp \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \perp \mathbf{a}_2\}$ $= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_2 = 0\}.$	**0.5**

		Ta có $\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_1 = 0, \mathbf{x}\cdot\mathbf{a}_2 = 0 \Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = 0, 3x_1 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_1, x_3 = -3x_1$. Vậy $W^{\perp} = \{[x_1 \quad 2x_1 \quad -3x_1]^T \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \text{Span}\{[1 \quad 2 \quad -3]^T\}$.	**0.5**
	d	Ta có $\dim\mathbb{R} = 1$ nên mọi họ con gồm 1 véc tơ khác véc tơ không của $\mathbb{R}$ là một cơ sở. Do đó họ $S = \left\{2017; 2018\right\}$ (có chứa hai véc tơ khác 0) không là một cơ sở của $\mathbb{R}$ nhưng là một hệ sinh của $\mathbb{R}$. Một cơ sở của $\mathbb{R}$ ta có thể lấy là $\{2017\}$ (hoặc đơn giản $\{1\}$).	**1.0**
C. 3		Ta có $\text{Ker}(T) = \text{Nul}A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ và $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$	**0.5**
		Vậy $\text{Nul}A = \{\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_3, x_2 = -3x_3\} = \text{Span}\{[2 \quad -3 \quad 1]^T\}$ và chiều của $\text{Ker}T$ là 1.	**0.5**
C. 4		Ba mặt phẳng có phương trình đã cho chỉ có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi hệ phương trình $$\begin{cases} (\omega_1):\ x + y + mz = 3, \\ (\omega_2):\ x + my - z = m + 1, \\ (\omega_3):\ (m+2)x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$$ có duy nhất một nghiệm. Điều này xảy ra khi và chỉ khi ma trận hệ số của hệ có định thức khác 0 (vì trong trường hợp đang xét ma trận này là ma trận vuông).	**0.5**
		Ta có ma trận hệ số của hệ là $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ m+2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ có định thức là $-m^3 - 2m^2 - m + 2$. Vậy hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $-m^3 - 2m^2 - m + 2 \neq 0$ (phương trình $-m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$ chỉ có duy nhất một nghiệm xấp xỉ 0.6956).	**0.5**
C. 5		• Trước hết phép nhân ma trận cũng là một phép toán trên H. Thật vậy, giả sử $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H, B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H$. Khi đó $AB = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \in H$. • Do phép nhân hai ma trận có tính chất kết hợp nên phép toán này trên H cũng có tính chất kết hợp. • Dễ thấy phần tử đơn vị của H là $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ vì $AI = IA = A$ với mọi $A \in H$.	**0.5**
		• Phần tử nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H$ chính là $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \in H$ (để ý rằng $a \neq 0$). • Cuối cùng, với $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in H, B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H$ ta có $AB = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ba & 0 \\ 0 & ba \end{bmatrix} = BA$, nghĩa là phép toán này trên H giao hoán. Từ tất cả những điều chứng tỏ trên ta suy ra rằng H là một nhóm Aben.	**0.5**
Tổng điểm			**10.0**