

Câu	Nội dung	Thang điểm
I	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(1 + x^3)^2 - 1} \left( \frac{1}{\sin x} - \cotan x \right)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{2x^3} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	<p>Hàm số <math>f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-\pi+x)}{x-\pi} &amp; \text{khi } x &gt; \pi, \\ \sin x + m &amp; \text{khi } x \leq \pi \end{cases}</math> xác định với mọi <math>x</math> khác <math>\pi</math> nên liên tục với mọi <math>x</math> khác <math>\pi</math>. Xét tại <math>x = \pi</math></p> <p><math>f(\pi) = m.</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\ln(1-\pi+x)}{x-\pi} = 1.</math></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin x + m) = m.</math></p> <p>Để hàm số liên tục tại <math>x = \pi</math> thì <math>f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \Leftrightarrow m = 1.</math></p>	0,25 0,25 0,25 0,25
	<p>Điểm tương ứng với <math>t = \frac{\pi}{4}</math> trên đồ thị (C) của hàm số cho bởi phương trình tham số <math>\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}</math> là <math>M \left( \cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).</math></p> <p><math>\begin{cases} x'(t) = -\sin t, \\ y'(t) = \cos t. \end{cases} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = -\cotant. \quad y' \left( \frac{\pi}{4} \right) = -1.</math></p>	0,25 0,25 0,25
	<p>Phương trình đường tiếp tuyến của (C) tại M là <math>y - \frac{\sqrt{2}}{2} = - \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow x + y = \sqrt{2}.</math></p>	0,25
II	<p><math>y = e^{x^2} + 3x^2.</math></p> <p><math>y' = 2xe^{x^2} + 6x = 2x(e^{x^2} + 3) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.</math></p> <p><math>y'' = (2 + 4x^2)e^{x^2} + 6</math> luôn dương với mọi <math>x.</math></p> <p>Hàm số có cực tiểu tại <math>x = 0.</math></p>	0,5 0,25 0,25
	<p>Tích phân <math>\int_1^{+\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^6+\sin x} dx = \int_1^{+\infty} f_1(x) dx</math></p> <p>Xét hàm <math>g_1(x) = \frac{1}{x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(x^3+5x-1)}{x^6+\sin x} = 1</math></p> <p>mà <math>\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx</math> hội tụ nên tích phân <math>\int_1^{+\infty} \frac{x^3+5x-1}{x^6+\sin x} dx</math> hội tụ</p>	0,5 0,5

	<p>Tích phân <math>\int_1^2 \frac{1+x}{x(\sqrt{x}-1)} dx = \int_1^2 f_2(x) dx</math> là tích phân suy rộng loại 2 tại cận dưới.</p> <p>Xét hàm <math>g_2(x) = \frac{1}{x-1}</math>; <math>\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1+x)(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1+x)(\sqrt{x}+1)}{x} = 4</math></p> <p>mà <math>\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx</math> phân kì nên tích phân <math>\int_1^2 \frac{1+x}{x(\sqrt{x}-1)} dx</math> phân kì.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>Xét phương trình giao điểm <math>1 + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1</math></p> <p>Diện tích hình miền phẳng giới hạn trên bởi đường thẳng <math>y = 2</math> và giới hạn dưới đường parabol <math>y = 1 + x^2</math> là</p> $\int_{-1}^1 (2 - 1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}$	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>Chuỗi số <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2e^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n</math></p> <p>Chọn <math>v_n = \frac{1}{n^2}</math>; <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(n^2-1)}{2e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{2e^n} = 0</math></p> <p>Mà chuỗi số <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}</math> hội tụ nên chuỗi <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2e^{n+1}}</math> cũng hội tụ.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
IV	<p>Chuỗi hàm <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n</math> với <math>X = 2x + 1</math> và <math>a_n = \frac{1}{n3^n}</math></p> <p><math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \Rightarrow</math> chuỗi <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n3^n}</math> hội tụ khi</p> <p><math>-3 &lt; X &lt; 3 \Leftrightarrow -3 &lt; 2x + 1 &lt; 3 \Leftrightarrow -2 &lt; x &lt; 1</math></p> <p>Xét tại <math>X = -3</math> chuỗi hàm có dạng <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}</math> là chuỗi đan dấu với dãy <math>\left\{ \frac{1}{n} \right\}</math> đơn điệu giảm về 0 khi <math>n \rightarrow +\infty</math> nên chuỗi đan dấu hội tụ.</p> <p>Xét tại <math>X = 3</math> chuỗi hàm có dạng <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}</math> là chuỗi phân kì.</p> <p>Vậy miền hội tụ của chuỗi hàm là <math>-2 \leq x &lt; 1</math>.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

Khai triển thành chuỗi Fourier hàm  $f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 6$  và được xác định bởi  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq x < 3, \\ 1 + x & \text{khi } 3 \leq x < 6. \end{cases}$

Khai triển Fourier của hàm  $f(x)$  tại  $x \neq 3k; k \in Z$  là

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n \sin \frac{n\pi x}{3} \right)$$

**0,25**

Với

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_3^6 (1+x) dx = \frac{11}{2}$$

**0,25**

$$a_n = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_3^6 (1+x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{3(1 - \cos(n\pi))}{n^2 \pi^2}$$

**0,25**

$$b_n = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_3^6 (1+x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{-7+4\cos(n\pi)}{n\pi}$$

**0,25**