

Câu 1 (1,5ñ) Xét thị trường có 3 sản phẩm với hàm cung và hàm cầu như sau:

• Sản phẩm 1: $Q_{S_1} = 11P_1 - 2P_2 + 2P_3 - 10$ $Q_{D_1} = -4P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 350$

• Sản phẩm 2: $Q_{S_2} = -P_1 + 10P_2 - 2P_3$ $Q_{D_2} = P_1 - 10P_2 + P_3 + 310$

• Sản phẩm 3: $Q_{S_3} = -2P_1 + 15P_3 - 20$ $Q_{D_3} = 2P_1 + P_2 - 6P_3 + 50$

Hãy tìm bộ giá và bộ sản lượng cân bằng thị trường của ba sản phẩm trên.

Câu 2 (2ñ) (Mô hình Input-Output của Leontief)

Xét mô hình Input – Output của một nền kinh tế có ba ngành sản xuất chính N_1, N_2, N_3 với ma

trần hệ số kỹ thuật của 3 ngành sản xuất là $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

a) Gọi v_1, v_2, v_3 lần lượt là ba vectơ cột của ma trận $I - A$. Chứng minh rằng $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b) Cho biết giá trị cầu cuối cùng nội với hàng hóa của ba ngành N_1, N_2, N_3 trong mỗi năm lần lượt là 118, 52, 96 (ngàn tỷ đồng). Tìm giá trị tổng cầu của mỗi ngành.

Câu 3 (2,5ñ) Cho dạng toàn phương $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

a) Gọi A là ma trận biểu diễn dạng toàn phương f . Hãy chéo hóa ma trận A và tính A^{10} .

b) Tìm hạng và xét dấu dạng toàn phương f .

Câu 4 (2ñ) Sản lượng hàng ngày của một xí nghiệp là $Q(L) = 9L^{\frac{1}{3}}$ (đơn vị tính là 1 tấn) trong đó L là lực lượng lao động (đơn vị tính là 1000 giờ). Chi phí sản xuất là $C(L) = wL$ (triệu đồng) trong đó $w = 18$ (triệu đồng) là chi phí cho mỗi đơn vị lao động. Giá bán của mỗi đơn vị sản lượng là $P = 6$ (triệu đồng).

a) Tìm sản lượng biên tế theo lực lượng lao động. Chứng minh sản lượng biên tế là hàm giảm.

b) Tìm lực lượng lao động để lợi nhuận hàng ngày của xí nghiệp đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2đ)

a) Một người chăn nuôi cần cung cấp cho tất cả vật nuôi 30g vitamin A và 33g vitamin D mỗi ngày. Người này có hai loại thức ăn: loại I chứa 10% vitamin A và 12% vitamin D, loại II chứa 6% vitamin A và 6% vitamin D. Chi phí cho mỗi kg thức ăn loại I là 50000đ và loại II là 30000đ. Tính tổng chi phí cho thức ăn loại I và loại II mà người này cần cung cấp cho tất cả vật nuôi mỗi ngày.

b) Một tờ rơi hình chữ nhật được thiết kế như sau: lề trên 3 cm, lề dưới 3 cm, lề trái 1 cm, lề phải 1 cm và diện tích phần in là 108 cm^2 . Tìm kích thước của tờ rơi để tờ rơi có chi phí nhỏ nhất biết chi phí cho mỗi cm^2 là 15đ.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Thang điểm
1	Thị trường cân bằng $\Leftrightarrow \begin{cases} Q_{S_1} = Q_{D_1} \\ Q_{S_2} = Q_{D_2} \\ Q_{S_3} = Q_{D_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15P_1 - 4P_2 - P_3 = 360 \\ -2P_1 + 20P_2 - 3P_3 = 310 \\ -4P_1 - P_2 + 21P_3 = 70 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} P_1 = 30 \\ P_2 = 20 \\ P_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 300 \\ Q_2 = 150 \\ Q_3 = 70 \end{cases}$	0,75đ 0,75đ
2	a. Xét $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9\alpha_1 - 0,3\alpha_2 - 0,2\alpha_3 = 0 \\ -0,4\alpha_1 + 0,8\alpha_2 - 0,3\alpha_3 = 0 \\ -0,2\alpha_1 - 0,3\alpha_2 + 0,9\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ Suy ra B độc lập tuyến tính. B có 3 vector và $\dim R^3 = 3$ nên B là một cơ sở của R^3	0,5đ 0,5đ
	b. $X = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 118 \\ 52 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 320 \\ 280 \end{pmatrix}$. Vậy giá trị tổng cầu ngành 1 là 300, ngành 2 là 320, ngành 3 là 280 (ngàn tỷ đồng)	0,5đ+0,5đ
3	a. Ma trận biểu diễn f là $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Hai trị riêng: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$ Hai vector riêng tương ứng: $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Đặt $P = (X_1 \ X_2)$, ta có $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ $A^{10} = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}^{10} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^9 + 2^{29} & 2^9 - 2^{29} \\ 2^9 - 2^{29} & 2^9 + 2^{29} \end{pmatrix}$	0,5đ 0,5đ 0,5đ
	b. Vì $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ nên hạng của f là 2 và f xác định dương.	0,5đ+0,5đ
4	a. Sản lượng biên tế là $Q'(L) = 3L^{-2/3}$ Vì $Q''(L) = -2L^{-5/3} < 0$ nên sản lượng biên tế là hàm giảm	0,5đ 0,5đ
	b. Lợi nhuận hàng ngày của xí nghiệp là: $\pi = R - C = PQ - C = 54L^{1/3} - 18L \quad (L > 0)$ $\pi' = 18L^{-2/3} - 18, \pi' = 0 \Leftrightarrow L = 1$ $\pi'' = -12L^{-5/3} < 0 \forall L > 0$ nên khi lực lượng lao động là 1000 giờ thì lợi nhuận hàng ngày của xí nghiệp đạt giá trị lớn nhất là 36 (triệu đồng) .	0,5đ 0,5đ

5	<p>a. Gọi lượng thức ăn loại I là x (g), loại II là y (g). Ta có hệ phương trình:</p> $\begin{cases} 0,1x + 0,06y = 30 \\ 0,12x + 0,06y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 \\ y = 250 \end{cases}$	0,5đ
	<p>Tổng chi phí mua thức ăn cho vật nuôi là: $0,15 \times 50000 + 0,25 \times 30000 = 15\,000$ đ</p>	0,5đ
	<p>b. Gọi chiều dài phần in là x (cm), chiều rộng phần in là y (cm). Diện tích phần in là : $xy = 108 \Rightarrow y = \frac{108}{x}$ Diện tích tờ rơi là: $S = (x + 6)(y + 2) \text{ cm}^2$ Chi phí làm tờ rơi là: $C = 15S = 15(x + 6)(y + 2) = 15(xy + 2x + 6y + 12) = 15(120 + 2x + \frac{648}{x})$ đồng $(x > 0)$ $C'(x) = 15(2 - \frac{648}{x^2}); C'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ x = -18 \text{ (loại)} \end{cases}$ $C''(x) = \frac{19440}{x^3} > 0 \forall x > 0$. Vậy chi phí nhỏ nhất làm tờ rơi là 2880đ khi tờ rơi có chiều dài là 24cm và chiều rộng là 8cm.</p>	0,5đ