

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2015-2016

MÔN: TOÁN CAO CẤP C₂

Mã môn học: **MATH 130901** Thời gian : 90 phút (11/1/2016)

Đề thi gồm 2 trang

Được phép sử dụng tài liệu

Câu 1 (1 điểm)

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp 1 hàm số $f(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2 + y^2} + ye^{3z}$

Câu 2 (2 điểm)

Một công ty sản xuất x ngàn sản phẩm loại A và y ngàn sản phẩm loại B mỗi năm. Biết hàm doanh thu và hàm chi phí lần lượt là

$$R(x, y) = 3x + 2y \text{ (đơn vị \$1,000,000)}$$

$$C(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 6y - 9x + 5 \text{ (đơn vị \$1,000,000)}$$

Xác định số sản phẩm mỗi loại cần sản xuất để công ty đạt lợi nhuận lớn nhất.

Câu 3 (1,5 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$xy = 1, \quad xy = 6, \quad \frac{x^2}{y} = 1, \quad \frac{x^2}{y} = 4$$

Câu 4 (1,5 điểm)

Một vụ tai nạn tràn dầu trên một hồ nước làm cho dầu loan ra dạng gần giống hình tròn trên mặt nước có bán kính $R(t)$ mét sau t phút tính từ lúc tai nạn xảy ra. Bán kính $R(t)$ tăng với tốc độ

$$R'(t) = \frac{24}{0,08t + 5} \text{ (mét/phút)}$$

- Tìm bán kính $R(t)$ theo t , với $R(0) = 0$.
- Ước tính diện tích phần dầu loan ra đúng 1 giờ sau tính từ lúc tai nạn xảy ra.

Câu 5 (2 điểm) (*Resale value problem*)

Giá trị bán lại $r(t)$ của một máy sau t năm (tính từ lúc mua) sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của máy. Tức là, nếu S là giá trị phế liệu của máy thì $r(t)$ thỏa phương trình

$$\frac{dr}{dt} = -k(r - S), \text{ với } k = \text{const} > 0 \text{ là hằng số tỷ lệ}$$

Xác định $r(t)$ biết giá trị mua mới của máy là \$80,000, giá trị 5 năm sau là \$10,000 và giá trị phế liệu $S = \$500$.

Câu 6 (2 điểm) (thời gian tính bằng tháng, giá p tính bằng USD)

Biết giá $p = p(t)$ của một loại sản phẩm(hàng hóa) tại thời điểm t thỏa phương trình vi phân

$$p'' + 8p' + 7p = 1800 + e^{-0,2t}$$

Giải phương trình vi phân trên. Ước tính giá của sản phẩm sau khoảng thời gian t đủ lớn.

*** Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
câu 1, câu 2 Tính được đạo hàm riêng, vi phân, tìm cực trị, GTLN & GTNN hàm nhiều biến và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2, , 2.1.4 ;
Câu 3, câu 4 Tính được tích phân hàm một biến, tích phân kép và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2., G1: 3.1
Câu 5, câu 6 Giải được phương trình vi phân cấp 1, cấp hai và và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2., G1: 3.1

Ngày 8 tháng 1 năm 2016

THÔNG QUA BỘ MÔN TOÁN

ĐÁP ÁN TOÁN C₂

(ngày thi 11/1/2016)

Câu hỏi	Nội dung	Điểm
Câu 1	$f(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2 + y^2} + ye^{3z}$ $\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}, \quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} + e^{3z}, \quad f'_z = 3ye^{3z} \\ df(x, y, z) &= f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} dx + \left(\frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} + e^{3z}\right) dy + 3ye^{3z} dz \end{aligned}$	1đ 0.5đ 0.5đ
Câu 2	<p>Hàm lợi nhuận</p> $P(x, y) = R(x, y) - C(x, y) = 12x - 4y + 2xy - 2x^2 - y^2 - 5$ <p>Tập xác định hàm số là:</p> $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ (lượng sản phẩm mỗi loại không âm)	1,5đ 0.5đ
	<p>Đạo hàm riêng của $P(x, y)$ theo biến x: $P'_x = 12 + 2y - 4x$</p> <p>Đạo hàm riêng của $P(x, y)$ theo biến y: $P'_y = -4 + 2x - 2y$</p> <p>Hệ phương trình xác định điểm dừng: $\begin{cases} P'_x = 12 + 2y - 4x = 0 \\ P'_y = -4 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$</p> <p>Giải hệ ta được nghiệm: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>Đạo hàm riêng cấp hai: $A = P''_{xx} = -4$, $B = P''_{xy} = 2$, $C = P''_{yy} = -2$</p> <p>Tại điểm dừng (4;2): $\begin{cases} A & B \\ B & C \end{cases} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ A = -4 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại (4;2), $P_{CD} = 15$.</p> <p>Vì $P(x, y)$ là hàm số bậc hai nên giá trị cực đại cũng là giá trị lớn nhất, $P_{\max} = 15$.</p> <p>Vậy công ty cần sản xuất 4000 sản phẩm loại A và 2000 sản phẩm loại B để đạt lợi nhuận lớn nhất là \$15,000,000.</p>	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ

<u>Câu 3</u>	1.5đ
<p>Diện tích hình phẳng: $S = \iint_D 1 \, dx \, dy$</p> <p>Đổi biến: $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases}$</p> $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3 \frac{x^2}{y} = -3v ,$ $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{-3v} \quad J = \frac{1}{3v}$ <p>Viết lại trong hệ tọa độ $o'uv$ D': $\begin{cases} 1 \leq u \leq 6 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}$</p> $S = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_1^6 du \int_1^4 \frac{1}{3v} dv = \frac{1}{3} u \Big _1^6 \cdot \ln v \Big _1^4 = \frac{5 \ln 4}{3} \text{ (đvdt)}$	0.25đ 0.5đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
<u>Câu 4</u>	1đ
<p>Bán kính</p> $R(t) = \int R'(t) dt + C = \int \frac{24}{0,08t + 5} dt + C = 300 \ln(0,08t + 5) + C$ $R(0) = 0 \Rightarrow 300 \ln 5 + C = 0 \Rightarrow C = -300 \ln 5$ <p>Vậy $R(t) = 300 \ln(0,08t + 5) - 300 \ln 5 = 300 \ln\left(\frac{0,08t + 5}{5}\right)$</p> <p>Ước tính diện tích phần dầu loan ra đúng 1 giờ sau tính từ lúc tai nạn xảy ra: $S \approx \pi[R(60)]^2 = \pi[300 \ln \frac{0,08 \times 60 + 5}{5}]^2 \approx 128041,56 m^2$</p>	0.5đ 0.5đ
<u>Câu 5</u>	2đ
<p><u>Cách 1</u></p> <p>Phương trình được viết lại</p> $r'(t) + kr = 0,5k, \text{ với } \begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases} \text{ (đơn vị \$1000)}$ <p>Nghiệm tổng quát phương trình</p>	0.5đ

	$r(t) = e^{-\int kdt} \left(\int 0,5ke^{\int kdt} dt + C \right) = e^{-kt} \left(\int 0,5ke^{kt} dt + C \right)$ $= e^{-kt} \left(0,5e^{kt} + C \right) = 0,5 + Ce^{-kt} \quad (\text{đơn vị } \$1000)$	0.5đ
	$\begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + C = 80 \\ 0,5 + Ce^{-3k} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 79,5 \\ k = \frac{-1}{3} \ln(\frac{9'5}{79,5}) \approx 0,708155 \end{cases}$ <p>Vậy $r(t) = 0,5 + 79,5e^{-0,7081t}$ ($\text{đơn vị } \\$1000$) hay $r(t) = 500 + 79500e^{-0,7081t}$ ($\text{đơn vị } \\$1$)</p>	0.5đ
	<p>Cách 2</p> <p>Phương trình được viết lại</p> $\frac{dr}{r - S} = -k$ <p>Tích phân hai vế</p> $\int \frac{dy}{r - S} = -\int kdt + \ln C $ $\Leftrightarrow \ln r - S = -kt + \ln C \Leftrightarrow r - S = e^{-kt+\ln C }$ $\Leftrightarrow r - S = Ce^{-kt} \Leftrightarrow r = S + Ce^{-kt}$ <p>Hay $r(t) = 0,5 + Ce^{-kt}$ ($\text{đơn vị } \\$1000$)</p> $\begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + C = 80 \\ 0,5 + Ce^{-3k} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 79,5 \\ k = \frac{-1}{3} \ln(\frac{9'5}{79,5}) \approx 0,708155 \end{cases}$ <p>Vậy $r(t) = 0,5 + 79,5e^{-0,7081t}$ ($\text{đơn vị } \\$1000$) hay $r(t) = 500 + 79500e^{-0,7081t}$ ($\text{đơn vị } \\$1$)</p>	0.5đ
	<p>Câu 6</p>	2đ
	$p'' + 8p' + 7p = 1800 + e^{-0,2t}$ <p>Phương trình thuần nhất tương ứng: $p'' + 8p' + 7p = 0$</p> <p>Phương trình đặc trưng: $k^2 + 8k + 7 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ hay $k = -7$</p> <p>Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất: $P_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-7t}$</p>	0.5đ
		0.25đ

<p>Nghiệm riêng phương trình $p''+8p'+7p=1800$ (1) dạng $Y_1 = A$</p> <p>Tính được $Y_1' = 0, Y_1'' = 0$. Thay vào (1) được $A = \frac{1800}{7}$.</p> <p>Suy ra $Y_1 = \frac{1800}{7}$</p>	0.25đ
<p>Nghiệm riêng phương trình $p''+8p'+7p=e^{-0,2t}$ (2) dạng $Y_2 = Be^{-0,2t}$</p> <p>Tính được $Y_2' = -0,2Be^{-0,2t}, Y_2'' = 0,04Be^{-0,2t}$. Thay vào (2) được $B = \frac{25}{136}$.</p> <p>Suy ra $Y_2 = \frac{25}{136}e^{-0,2t}$</p>	0.25đ
<p>Theo nguyên lý chồng chất nghiệm thì nghiệm riêng của phương trình $p''+8p'+7p=1800+e^{-0,2t}$ là $\bar{P}(t) = Y_1 + Y_2 = \frac{1800}{7} + \frac{25}{136}e^{-0,2t}$</p>	
<p>Nghiệm tổng quát phương trình $p''+8p'+7p=1800+e^{-0,2t}$ là $p(t) = P_o(t) + \bar{P}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-7t} + \frac{1800}{7} + \frac{25}{136}e^{-0,2t}$</p>	0.25đ

Khi t đủ lớn $C_1e^{-t} + C_2e^{-7t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \approx 0$ nên $p(t) \approx \frac{1800}{7}$ (USD)

Sau khoảng thời gian t đủ lớn, giá sản phẩm xấp xỉ $\$ \frac{1800}{7}$.

Hết