

Câu 1 (1 điểm)

Tính đạo hàm riêng và vi phân cấp 1 hàm số $f(x, y, z) = \sqrt{4 + x^2 + y^2} + ye^{3z}$

Câu 2 (2 điểm)

Một công ty sản xuất x ngàn sản phẩm loại A và y ngàn sản phẩm loại B mỗi năm. Biết hàm doanh thu và hàm chi phí lần lượt là

$$R(x, y) = 3x + 2y \text{ (đơn vị \$1,000,000)}$$

$$C(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 6y - 9x + 5 \text{ (đơn vị \$1,000,000)}$$

Xác định số sản phẩm mỗi loại cần sản xuất để công ty đạt lợi nhuận lớn nhất.

Câu 3 (1,5 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$xy = 1, \quad xy = 6, \quad \frac{x^2}{y} = 1, \quad \frac{x^2}{y} = 4$$

Câu 4 (1,5 điểm)

Một vụ tai nạn tràn dầu trên một hồ nước làm cho dầu loang ra dạng gần giống hình tròn trên mặt nước có bán kính $R(t)$ mét sau t phút tính từ lúc tai nạn xảy ra. Bán kính $R(t)$ tăng với tốc độ

$$R'(t) = \frac{24}{0,08t + 5} \text{ (mét/phút)}$$

a) Tìm bán kính $R(t)$ theo t , với $R(0) = 0$.

b) Ước tính diện tích phần dầu loang ra đúng 1 giờ sau tính từ lúc tai nạn xảy ra.

Câu 5 (2 điểm) (*Resale value problem*)

Giá trị bán lại $r(t)$ của một máy sau t năm (tính từ lúc mua) sẽ giảm với tốc độ tỷ lệ với hiệu giữa giá trị hiện tại và giá trị phế liệu của máy. Tức là, nếu S là giá trị phế liệu của máy thì $r(t)$ thỏa phương trình

$$\frac{dr}{dt} = -k(r - S), \text{ với } k = \text{const} > 0 \text{ là hằng số tỷ lệ}$$

Xác định $r(t)$ biết giá trị mua mới của máy là \$80,000, giá trị 5 năm sau là \$10,000 và giá trị phế liệu $S = \$500$.

Câu 6 (2 điểm) (thời gian t tính bằng tháng, giá p tính bằng USD)

Biết giá $p = p(t)$ của một loại sản phẩm(hàng hóa) tại thời điểm t thỏa phương trình vi phân

$$p''+8p'+7p=1800+e^{-0,2t}$$

Giải phương trình vi phân trên. Ước tính giá của sản phẩm sau khoảng thời gian t đủ lớn.

*** Ghi chú :** Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
câu 1, câu 2 Tính được đạo hàm riêng, vi phân, tìm cực trị, GTLN & GTNN hàm nhiều biến và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2, , 2.1.4 ;
Câu 3, câu 4 Tính được tích phân hàm một biến, tích phân kép và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2., G1: 3.1
Câu 5, câu 6 Giải được phương trình vi phân cấp 1, cấp hai và biết ứng dụng vào đời sống	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1, 2.2., G1: 3.1

Ngày 8 tháng 1 năm 2016

THÔNG QUA BỘ MÔN TOÁN

Câu 3		1.5đ
<p>Diện tích hình phẳng: $S = \iint_D 1 \, dx dy$</p> <p>Đổi biến: $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x^2}{y} \end{cases}$</p> <p>$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3 \frac{x^2}{y} = -3v$,</p> <p>$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{-3v} \quad J = \frac{1}{3v}$</p> <p>Viết lại trong hệ tọa độ $o'uv$ D': $\begin{cases} 1 \leq u \leq 6 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}$</p> <p>$S = \iint_D 1 \, dx dy = \int_1^6 du \int_1^4 \frac{1}{3v} dv = \frac{1}{3} u \Big _1^6 \cdot \ln v \Big _1^4 = \frac{5 \ln 4}{3}$ (đvdt)</p>	<p>0.25đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p> <p>0.25đ</p>	
Câu 4		1đ
<p>Bán kính</p> <p>$R(t) = \int R'(t) dt + C = \int \frac{24}{0,08t + 5} dt + C = 300 \ln(0,08t + 5) + C$</p> <p>$R(0) = 0 \Rightarrow 300 \ln 5 + C = 0 \Rightarrow C = -300 \ln 5$</p> <p>Vậy $R(t) = 300 \ln(0,08t + 5) - 300 \ln 5 = 300 \ln\left(\frac{0,08t + 5}{5}\right)$</p> <p>Ước tính diện tích phần dầu loãn ra đúng 1 giờ sau tính từ lúc tai nạn xảy ra: $S \approx \pi [R(60)]^2 = \pi \left[300 \ln \frac{0,08 \times 60 + 5}{5}\right]^2 \approx 128041,56 m^2$</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>	
Câu 5		2đ
<p>Cách 1</p> <p>Phương trình được viết lại</p> <p>$r'(t) + kr = 0,5k$, với $\begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases}$ (đơn vị \$1000)</p> <p>Nghiệm tổng quát phương trình</p>	<p>0.5đ</p>	

	$r(t) = e^{-\int k dt} \left(\int 0,5ke^{\int k dt} dt + C \right) = e^{-kt} \left(\int 0,5ke^{kt} dt + C \right)$ $= e^{-kt} \left(0,5e^{kt} + C \right) = 0,5 + Ce^{-kt} \quad (\text{đơn vị } \$1000)$	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
	$\begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + C = 80 \\ 0,5 + Ce^{-3k} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 79,5 \\ k = \frac{-1}{3} \ln\left(\frac{9,5}{79,5}\right) \approx 0,708155 \end{cases}$ <p>Vậy $r(t) = 0,5 + 79,5e^{-0,7081t}$ (đơn vị \$1000)</p> <p>hay $r(t) = 500 + 79500e^{-0,7081t}$ (đơn vị \$1)</p>	<p>0.5đ</p>
	<p><u>Cách 2</u></p> <p>Phương trình được viết lại</p> $\frac{dr}{r-S} = -k$ <p>Tích phân hai vế</p> $\int \frac{dy}{r-S} = -\int k dt + \ln C $ $\Leftrightarrow \ln r-S = -kt + \ln C \Leftrightarrow r-S = e^{-kt + \ln C }$ $\Leftrightarrow r-S = Ce^{-kt} \Leftrightarrow r = S + Ce^{-kt}$ <p>Hay $r(t) = 0,5 + Ce^{-kt}$ (đơn vị \$1000)</p> $\begin{cases} r(0) = 80 \\ r(5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5 + C = 80 \\ 0,5 + Ce^{-3k} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 79,5 \\ k = \frac{-1}{3} \ln\left(\frac{9,5}{79,5}\right) \approx 0,708155 \end{cases}$ <p>Vậy $r(t) = 0,5 + 79,5e^{-0,7081t}$ (đơn vị \$1000)</p> <p>hay $r(t) = 500 + 79500e^{-0,7081t}$ (đơn vị \$1)</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>
<u>Câu 6</u>		2đ
	$p'' + 8p' + 7p = 1800 + e^{-0,2t}$ <p>Phương trình thuần nhất tương ứng : $p'' + 8p' + 7p = 0$</p> <p>Phương trình đặc trưng: $k^2 + 8k + 7 = 0 \Leftrightarrow k = -1$ hay $k = -7$</p>	<p>0.5đ</p>
	<p>Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất: $P_o(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-7t}$</p>	<p>0.25đ</p>

	<p>Nghiệm riêng phương trình $p''+8p'+7p=1800$ (1) dạng $Y_1 = A$</p> <p>Tính được $Y_1' = 0, Y_1'' = 0$. Thay vào (1) được $A = \frac{1800}{7}$.</p> <p>Suy ra $Y_1 = \frac{1800}{7}$</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm riêng phương trình $p''+8p'+7p = e^{-0,2t}$ (2) dạng $Y_2 = Be^{-0,2t}$</p> <p>Tính được $Y_2' = -0,2Be^{-0,2t}, Y_2'' = 0,04Be^{-0,2t}$. Thay vào (2) được $B = \frac{25}{136}$.</p> <p>Suy ra $Y_2 = \frac{25}{136}e^{-0,2t}$</p> <p>Theo nguyên lý chồng chất nghiệm thì nghiệm riêng của phương trình $p''+8p'+7p = 1800 + e^{-0,2t}$ là $\bar{P}(t) = Y_1 + Y_2 = \frac{1800}{7} + \frac{25}{136}e^{-0,2t}$</p>	0.25đ
	<p>Nghiệm tổng quát phương trình $p''+8p'+7p = 1800 + e^{-0,2t}$ là</p> $p(t) = P_o(t) + \bar{P}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-7t} + \frac{1800}{7} + \frac{25}{136}e^{-0,2t}$	0.25đ
	<p>Khi t đủ lớn $C_1e^{-t} + C_2e^{-7t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \approx 0$ nên $p(t) \approx \frac{1800}{7}$ (USD)</p> <p>Sau khoảng thời gian t đủ lớn, giá sản phẩm xấp xỉ $\\$ \frac{1800}{7}$.</p>	0.5đ

.....**Hết**.....